Universidad Nacional del Litoral
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Examen Parcial – 1/11/13

1. Sea el problema de valores de frontera

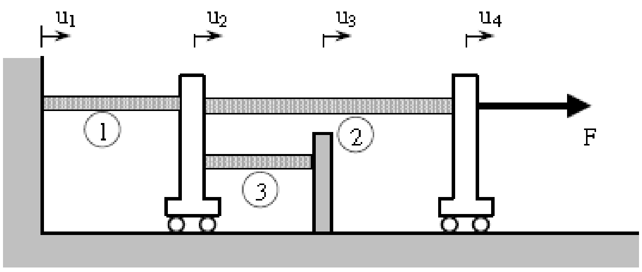
$$
\begin{aligned}
&-\nabla\bullet\left((4+x)\nabla u\right)+5u = f && \text{en } \Omega\subset\Re^2\\
&u=0 && \text{sobre } \Gamma_u\\
&\nabla u\bullet\mathbf{n}=g && \text{sobre } \Gamma_g
\end{aligned}
$$

donde $\Gamma=\Gamma_u\oplus\Gamma_g=\partial\Omega$ es el contorno del dominio, $u(\mathbf{x})$ es el campo incógnita (escalar), y $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ son funciones conocidas.

a. Plantear una formulación variacional adecuada para este problema.

b. Plantear un método de elementos finitos a partir de la formulación variacional hallada, usando elementos triangulares. Desarrollar expresiones de las distintas matrices y vectores que componen los sistemas a resolver.

2. Sea el problema unidimensional de la figura. Las barras elásticas son todas iguales, de sección transversal A y módulo de elasticidad E. La longitud de las barras 1 y 3 es L, y la de la barra 2 es 2L.



a. Escribir la matriz de rigidez elemental para los elementos 1, 2 y 3, cuando se usan funciones de interpolación lineales.

b. Escribir la expresión de la matriz de rigidez global.

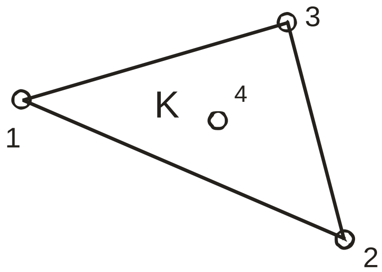
c. Aplicar las condiciones de borde, y obtener la matriz de rigidez reducida, por eliminación de filas y columnas correspondientes a grados de libertad restringidos.

d. Resolver el sistema de ecuaciones. Calcular el valor del desplazamiento u_4.

3. Se quiere construir un elemento finito triangular de cuatro nodos con continuidad C_0, como muestra la figura.

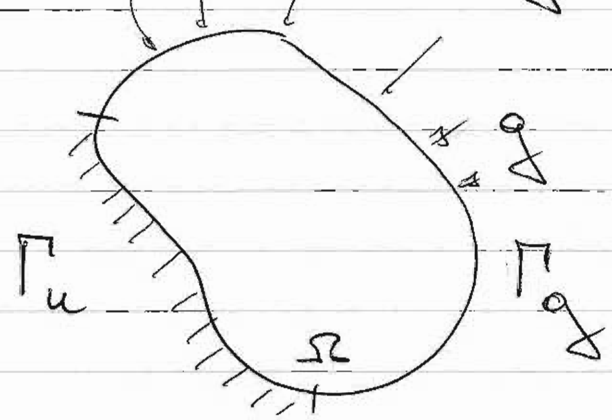
a. Proponga un conjunto adecuado de funciones de forma para este propósito. Justificar su elección.

b. Verificar se cumplen los requerimientos necesarios para que la formulación del elemento finito sea correcta.



1)
$$-\underline{\nabla}\circ\left([4+x]\ \underline{\nabla}u\right)+5u=f \qquad \text{en } \Omega\subset\mathbb{R}^2$$
$$u=0 \qquad \text{sobre } \Gamma_u$$
$$\underline{\nabla}u\circ\underline{n}=g \qquad \text{sobre } \Gamma_g$$

$\Gamma_u \oplus \Gamma_g = \partial\Omega$



2) Multiplico por una función $v(x)$ / $v(x)=0$ sobre Γ_u:
$$-\int_\Omega v\ \underline{\nabla}\circ\left([4+x]\ \underline{\nabla}u\right)d\Omega+\int_\Omega 5\,v\,u\,d\Omega=\int_\Omega v f\,d\Omega$$

Aplicando T de Green:
$$-\int_{\partial\Omega=\Gamma_u\oplus\Gamma_g} v\ [4+x]\ \underline{\nabla}u\circ\underline{n}\ d\Gamma+\int_\Omega \underline{\nabla}v\circ[4+x]\ \underline{\nabla}u\,d\Omega+$$
$$+\int_\Omega 5\,v\,u\,d\Omega=\int_\Omega v f\,d\Omega$$

Siendo $v\big|_{\Gamma_u}=0$ y $\underline{\nabla}u\circ\underline{n}=g$ sobre Γ_g:
$$-\int_{\Gamma_g}(4+x)\,g\,v\,d\Gamma+\int_\Omega(4+x)\ \underline{\nabla}u\circ\underline{\nabla}v\,d\Omega+\int_\Omega 5\,u\,v\,d\Omega=\int_\Omega f v\,d\Omega$$

$$\underbrace{\int_\Omega (1+x)\, \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega 5\, u\, v\, d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v\, d\Omega + \int_{\Gamma_g} (1+x)\, g\, v\, d\Gamma}_{L(v)}$$

$a(u,v)$ Forma bilineal simétrica continua coerciva

$L(v)$ Forma lineal continua

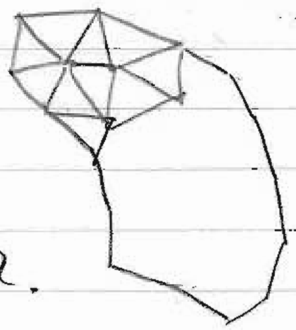
Llegamos así a plantear el siguiente problema variacional:

"Sea $V = \{ v \,/\, v \in H^1(\Omega)$ y $v = 0$ sobre $\Gamma_u \}$.

Hallar $u \in V$ /

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V \text{"}$$

b) Asumimos Ω con frontera poligonal.



Sea $T_h = \{K\}$

Una triangulación del dominio Ω.

Sea

$$V_h = \{ v \,/\, v \in C^0(\Omega) \; , \; v|_K \in P_1(K) \; \forall K \in T_h , \; y \; v|_{\Gamma_u} = 0 \}$$

Notar $V_h \subset V$. Formulamos así el problema variacional discreto:

"Hallar $u_h \in V_h$ /

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h \text{"}$$

El espacio V_h es un espacio vectorial de dimensión finita N. Luego, toda función $v \in V_h$ puede expresarse como combinación lineal de los elementos de una base de V_h:

$$v = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(\underline{x})\, \eta_i$$

Como funciones de base, elegimos fcs q/cumpla la prop "delta": $\varphi_i(\underline{x}) \in V_h$ / $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $i,j = 1,2,\ldots$

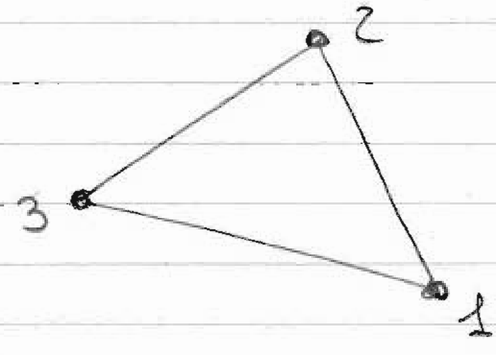
Así, los valores $\eta_i = v(\underline{x}_i)$ resultan igual al valor de la función en el nodo.

Reemplazando en el prob variacional discreto, se llega al sistema de ecuaciones:

$$\underbrace{\left[\int_\Omega (4+x)\, \underline{\nabla}\varphi_i \cdot \underline{\nabla}\varphi_j \, d\Omega + \int_\Omega 5\, \varphi_i \varphi_j \, d\Omega\right]}_{K_{ij}} U_j = \underbrace{\int_\Omega \varphi_i f \, d\Omega + \int_{\Gamma_g} (4+x)\, \varphi_i\, g \, d\Gamma}_{F_i}$$

$$K_{ij}\, U_j = F_i \qquad i,j = 1,\ldots N$$

Construyo un elemento finito triangular eligiendo como grados de libertad los valores de la función en los nodos (vértices) del elemento.



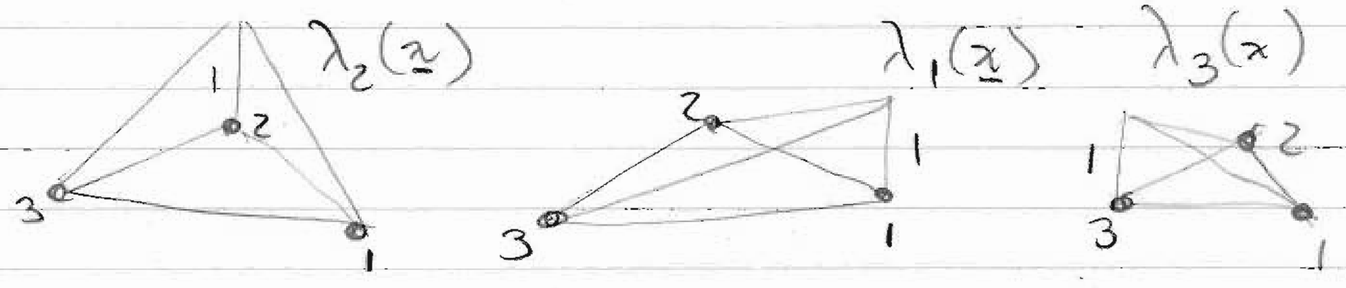
Así, toda función $v \in P_1(K)$ puede expresarse en forma única:

$$v(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\underline{x})\, V_i$$

Las funciones $\lambda_i(\underline{x}) \in P_1(K)$ son tales que verifican la propiedad "delta":

$$\lambda_i(\underline{x}_j) = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,3$$

donde $\underline{x}_j$ son las coordenadas de los nodos del elemento.



Las funciones $\lambda_i(\underline{x})$ son restricciones de las fcs de base $\varphi_i(\underline{x})$ al triángulo K:

$$\lambda_i(\underline{x}) = \varphi_i(x)\Big|_K$$

La matriz de rigidez se obtiene por suma de integrales sobre los triángulos de T_h:

$$K_{ij} = \underset{K\in T_h}{\mathbb{A}} k_{ij} \qquad F_i = \underset{K\in T_h}{\mathbb{A}} f_i$$

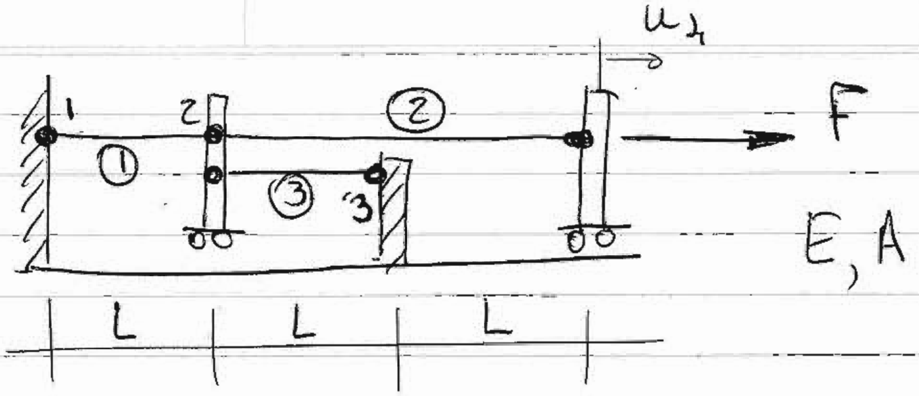
donde

$$k_{ij} = \int_K (2+x)\, \underline{\nabla}\lambda_i \cdot \underline{\nabla}\lambda_j \, d\Omega + \int_K 5\,\lambda_i \lambda_j \, d\Omega$$

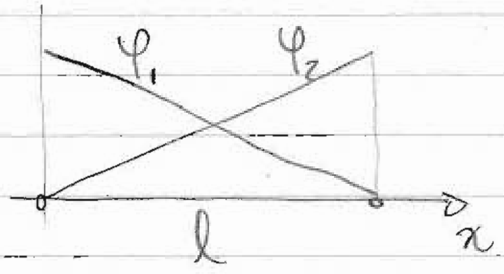
$$f_i = \int_K \lambda_i f \, d\Omega + \int_{\partial K} (\cancel{4}+x)\, \lambda_i\, g \, d\Gamma$$

donde $\partial K \subset \Gamma_g$ es todo contorno de elemento perteneciente a la porción de frontera Γ_g.

2)



a) Matriz de rigidez del elemento, con fcs de interpolación lineales:



$$\varphi_1 = 1 - \frac{x}{l} \Rightarrow \varphi_1' = -\frac{1}{l}$$

$$\varphi_2 = \frac{x}{l} \Rightarrow \varphi_2' = \frac{1}{l}$$

$$A^e_{ij} = EA\left(\varphi_i', \varphi_j'\right) \qquad i,j = 1,2$$

Así:

$$\underline{\underline{A}}^1 = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^3$$

$$\underline{\underline{A}}^2 = \frac{EA}{2L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez global resulta:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1+\frac{1}{2}+1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ & -1 & 1 & \\ & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5/2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Introduciendo las condiciones de borde $u_1 = u_3 = 0$

$$\bar{\underline{\underline{A}}} = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 5/2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$

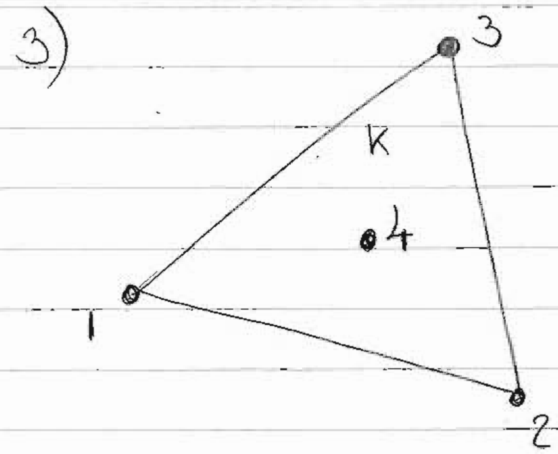
$$\frac{EA}{2L}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

$$+\;\begin{cases} 5u_2 - u_4 = 0 \\ 5\times\left(-u_2 + u_4 = \dfrac{2FL}{EA}\right) \end{cases}$$

$$4u_4 = \frac{10FL}{EA}$$

$$\boxed{u_4 = \frac{5}{2}\frac{FL}{EA}}$$

3)

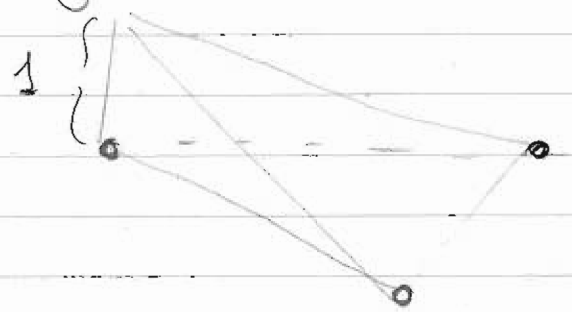


Elemento C_0 con 4 nodos?

Las funciones de forma

$$\lambda_i(\underline{x}) \in P_1(K) \;/\; \lambda_i(\underline{x}_j) = \delta_{ij}$$

permiten construir un elemento de 3 GDL para representar campos $u(\underline{x}) \in P_1(K)$.
Las funciones $\lambda_i(x)$ tienen la forma:



Podemos "enriquecer" este elemento mediante la función "burbuja"

$$b(\underline{x}) = 27\,\lambda_1(\underline{x})\,\lambda_2(\underline{x})\,\lambda_3(\underline{x})$$

Notar:

$$b(\underline{x}_1) = b(\underline{x}_2) = b(\underline{x}_3) = 0$$

$$b(\underline{x}_4) = 27 \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3} = 1$$

El siguiente conjunto de funciones de forma:

$$\begin{cases} \psi_i(\underline{x}) = \lambda_i(\underline{x}) - \frac{1}{3} b(\underline{x}) & i = 1,2,3 \\ \psi_4(\underline{x}) = b(\underline{x}) \end{cases}$$

$$v(\underline{x}) = \sum_{i=1,4} \psi_i(\underline{x})\, v_i$$

verifica:

I) Propiedad delta

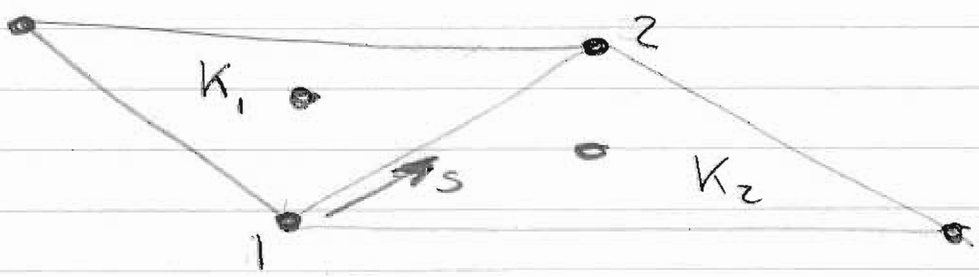
$$\psi_i(\underline{x}_j) = \underbrace{\lambda_i(\underline{x}_j)}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{3}\underbrace{b(\underline{x}_j)}_{0 \quad j=1,2,3} = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,3$$

$$\psi_i(\underline{x}_4) = \lambda_i(\underline{x}_4) - \frac{1}{3} b(\underline{x}_4) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \qquad i = 1,2,3$$

$$\psi_4(\underline{x}_i) = b(\underline{x}_i) = 0 \qquad i = 1,2,3$$

$$\psi_4(x_4) = 1$$

II) Continuidad interelemental



Notar $b(\underline{x}) = 0$ en ∂K. Luego, a lo largo del borde 1-2 la función depende únicamente de los valores nodos 1 y 2. Pero, siendo:

$$v_1^{K_1} = v_1^{K_2} \quad y \quad v_2^{K_2} = v_2^{K_2}$$

y la restricción de

$$v^{K_1}(x)\Big|_{lado\ 1-2} = P_1(s)$$

$$v^{K_2}(x)\Big|_{lado\ 1-2} = P_1(s)$$

luego se verifica continuidad interelemental.

III) Trivialmente, para un elemento c/funciones de forma $\psi_i(\underline{x})$ /

$$v(x) = \sum_{i=1,4} \psi_i(\underline{x})\, v_i$$

$$v_i = 0,\ i=1,4 \Rightarrow v(\underline{x}) = 0$$

Este elemento representa exactamente funciones $p \in P_1(x)$

$$v(\underline{x}) = \sum \psi_i(\underline{x})\, p_i = \sum \psi_i(\underline{x})\, p(\underline{x}_i) =$$

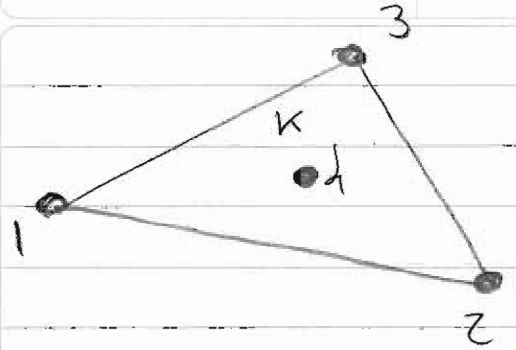
$$= \lambda_i(\underline{x})\, p(\underline{x}_i) - \frac{1}{3} b(\underline{x}) \left(p(\underline{x}_1) + p(\underline{x}_2) + p(\underline{x}_3)\right)$$

$$+ b(\underline{x})\, p(\underline{x}_4) =$$

$$= \lambda_i(\underline{x})\, p(\underline{x}_i) - \cancel{b(\underline{x})\, p(\underline{x}_4)} + \cancel{b(\underline{x})\, p(\underline{x}_4)} =$$

$$\boxed{v(\underline{x}) = p(\underline{x})}$$

porque $p(\underline{x}) \in P_1(x)$



Puede también formularse un elemento de 4 nodos con campos
$$v(\underline{x}) \in P_3(K)$$

$$\dim P_3(K) = 10$$

Puede usarse como GDL:

$$10 \left[\begin{array}{ll} v(x_i) & i = 1,2,3 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_i) & i = 1,2,3 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_i) & i = 1,2,3 \\ v(x_4) & \end{array} \right.$$