

# Introducción al Método de los Elementos Finitos

## Parte 1

### Introducción al MEF para problemas elípticos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

Cimec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

04/09/2020

# 1. Introducción al MEF para problemas elípticos

- Problemas elípticos “modelo” y solución por MEF
  - Problema simple 1-D
  - Generalización a 2-D
- Propiedades básicas del método

## (1.1) Formulaci3n variacional del problema 1-D

- Sea el problema de valores de frontera:

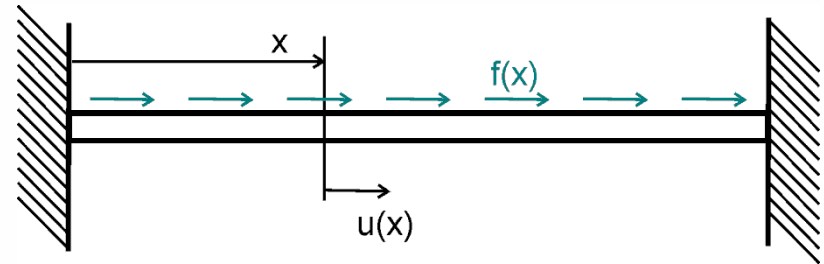
$$(D) \quad \begin{aligned} -u'' &= f(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

donde  $u' = \frac{du}{dx}$ ;  $f(x)$  es una funci3n continua dada.

- Integrando 2 veces, vemos que el problema tiene soluci3n 3nica  $u$ .
- (D) puede describir cualquiera de los siguientes problemas de Mec3nica del continuo:
  - A. Barra el3stica
  - B. Cuerda el3stica
  - C. Conducci3n del calor en una barra

## A) Barra elástica

Barra elástica sujeta en ambos extremos y sometida a carga axial de intensidad  $f(x)$



Bajo hipótesis de pequeños desplazamientos y material elástico lineal:

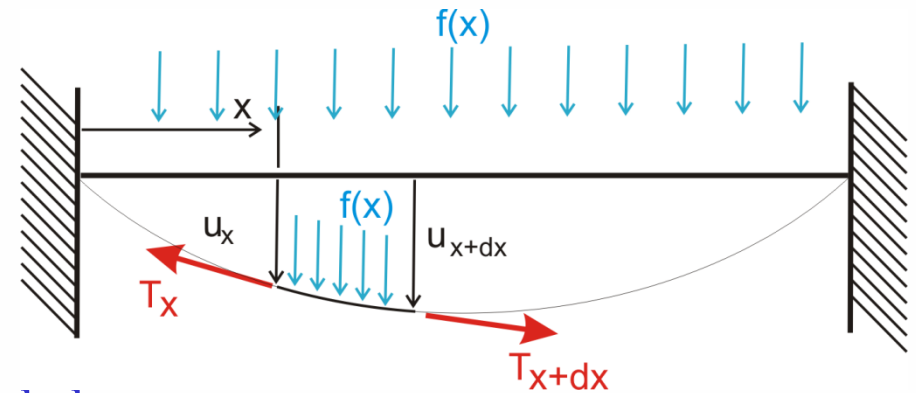
$$\begin{array}{ll} \sigma = Eu' & \text{Ley de Hooke} \\ -\sigma' = f & \text{Ec. de equilibrio} \\ u(0) = u(1) = 0 & \text{Cond. de borde} \end{array}$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad. Asumiendo  $E=1$

$$(D) \quad \begin{array}{l} -u'' = f(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}$$

## B) Cuerda elástica

Cuerda elástica sujeta en ambos extremos, con tensión unitaria y sometida a carga transversal de intensidad  $f(x)$



El equilibrio del segmento considerado está dado por:

$$T_{x+dx} \cos \theta_{x+dx} - T_x \cos \theta_x = 0$$

$$T_{x+dx} \sin \theta_{x+dx} - T_x \sin \theta_x + \int_x^{x+dx} f(s) ds = 0$$

Bajo hipótesis de pequeños desplazamientos

$$\cos \theta_{x+dx} \simeq \cos \theta_x \simeq 1 \quad \rightarrow \quad T_{x+dx} \simeq T_x \simeq T = 1$$

Además

$$\sin \theta_y \simeq \tan \theta_y \simeq \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_y$$

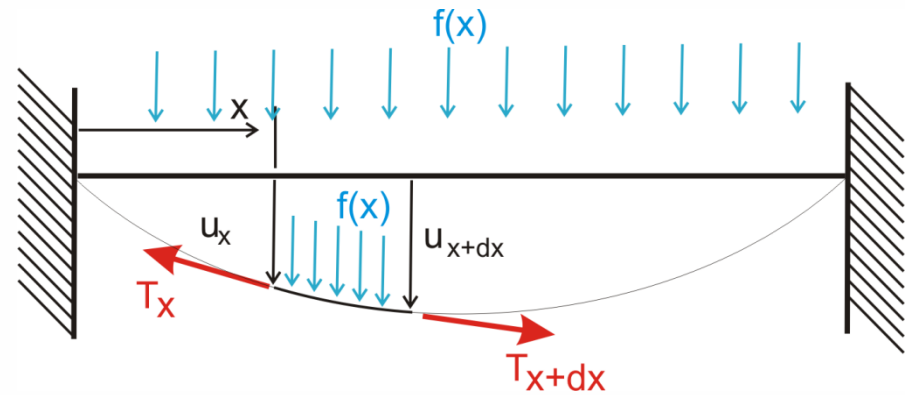
## B) Cuerda elástica

En la segunda ecuación:

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x + f(x) dx = 0$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = 0$$

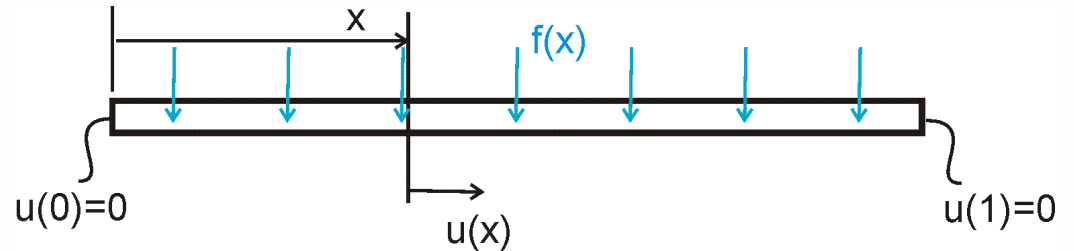


Y considerando las condiciones de borde:

$$(D) \quad \begin{aligned} -u'' &= f(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

## C) Conducción de calor en una barra

Barra sometida a fuente de calor distribuida  $f(x)$ , con temperatura nula en ambos extremos.



Bajo condiciones estacionarias y material lineal:

$$\begin{array}{ll} -q = ku' & \text{Ley de Fourier} \\ q' = f & \text{Ec de equilibrio} \\ u(0) = u(1) = 0 & \text{Cond de borde} \end{array}$$

donde  $k$  es la conductividad. Asumiendo  $k=1$

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & -u'' = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ & u(0) = u(1) = 0 \end{array}$$

# Problemas de minimización y variacional

Veremos que la solución al problema (D) es también solución del problema de minimización (M) y de un problema variacional (V)

Para formular (M) y (V) introducimos nueva notación.

1. Producto interno  $(v, w)$ :

$$(v, w) = \int_0^1 v(x) w(x) dx$$

para funciones reales acotadas continuas por tramos  $v, w$ .

2. Espacio lineal  $V$ : 
$$V = \left\{ v / \begin{array}{l} v \text{ función continua sobre } [0,1] \text{ ,} \\ v' \text{ es continua p/tramos y acotada en } [0,1], \\ v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right\}$$

3. Funcional  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  (Ojo: este funcional **no** es lineal. Analizar)

$$F(v) = \frac{1}{2} (v', v') - (f, v)$$



## Problemas de minimización y variacional (cont)

Problema (M):

$$(M) \quad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V$$

Problema (V):

$$(V) \quad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad (u', v') = (f, v) \quad \forall v \in V$$

Nota: en el contexto de los problemas (A) y (B)

$F(v)$  es la energía potencial total asociada al desplazamiento  $v$

$\frac{1}{2}(v', v')$  es la energía elástica interna

$(f, v)$  es el potencial de cargas

Problema (M): principio de mínima energía potencial en Mecánica

Problema (V): principio de trabajos virtuales en Mecánica

Veremos la equivalencia de los problemas (D), (V) y (M)

## La solución de (D) es solución de (V)

1. Multiplicamos  $-u'' = f$  por una función arbitraria  $v \in V$  (func. de test).  
Integramos sobre  $(0, 1)$ :

$$-(u'', v) = (f, v)$$

2. Integramos por partes el lado izquierdo, y usamos  $v(0)=v(1)=0$ :

$$-(u'', v) = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + (u', v') = (u', v')$$

3. Al ser  $v$  arbitraria:

$$(u', v') = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (1.1)$$

o sea,  $u$  es solución de (V)

## Los problemas (M) y (V) tienen la misma solución

1. Sea  $u$  solución de (V). Sea  $v \in V$  y  $w = v - u$  /  $v = u + w \wedge w \in V$ .

Luego:

$$\begin{aligned} F(v) &= F(u + w) = \frac{1}{2}(u' + w', u' + w') - (f, u + w) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(u', u') - (f, u)}_{F(u)} + \underbrace{(u', w') - (f, w)}_{= 0 \text{ por (1.1)}} + \underbrace{\frac{1}{2}(w', w')}_{\geq 0} \geq F(u) \end{aligned}$$

o sea,  $u$  es solución del problema (M).

- Sea  $u$  solución de (M). Luego  $\forall v \in V$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ :  $F(u) \leq F(u + \varepsilon v)$  (\*)

Definiendo:

$$g(\varepsilon) \triangleq F(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}(u', u') + \varepsilon(u', v') + \frac{\varepsilon^2}{2}(v', v') - (f, u) - \varepsilon(f, v)$$

Por (\*)  $g(\varepsilon)$  tiene un mínimo en  $\varepsilon = 0$ . Luego :

$$g'(0) = (u', v') - (f, v) \stackrel{\substack{= \\ g(\varepsilon) \text{ min en } 0}}{=} 0$$

o sea,  $u$  es solución del problema (V).

## La solución de (V) es única

1. Sean  $u_1, u_2$  soluciones de (V):  $u_1, u_2 \in V$  y

$$(u_1', v') = (f, v) \quad \forall v \in V$$

$$(u_2', v') = (f, v) \quad \forall v \in V$$

2. Sustrayendo, y eligiendo  $v = u_1 - u_2 \in V$

$$\int_0^1 (u_1' - u_2')^2 dx = 0$$

lo cual muestra que:

$$u_1'(x) - u_2'(x) = (u_1 - u_2)'(x) = 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

3. Usando la condición de borde:

$$u_1(0) = u_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = u_2(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

o sea, la solución a (V) es única.

## Equivalencia de soluciones a (D), (V) y (M)

1. Hasta ahora hemos visto que si  $u$  es solución a (D), luego es solución a los problemas equivalentes (V) y (M) :

$$(D) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (M)$$

Mostraremos que si  $u$  es solución de (V), luego  $u$  satisface (D).

2. Sea

$$u \in V \quad / \quad \int_0^1 u' v' dx - \int_0^1 f v dx = 0 \quad \forall \quad v \in V$$

Asumimos  $u''$  existe y es continua. Integ.p/partes y usando  $v(0) = v(1) = 0$

$$-\int_0^1 u'' v dx - \int_0^1 f v dx + u' v \Big|_0^1 = 0$$

$$-\int_0^1 (u'' + f) v dx = 0 \quad \forall \quad v \in V$$

Como  $(u'' + f)$  es continua, luego:

$$(u'' + f)(x) = 0 \quad 0 < x < 1$$

o sea,  $u$  es solución de (D).

# Equivalencia de soluciones (D), (V) y (M)

Resumiendo: Hemos demostrado que

1. La solución de la ecuación diferencial es solución de un problema variacional
2. La solución del problema variacional es también solución de un problema de minimización y viceversa
3. La solución del problema variacional es única
4. Si se cumple un **requisito de regularidad ( $u''$  continua)**, la solución del problema variacional es también solución de la ecuación diferencial

Notar: Las soluciones a los problemas variacional y de minimización vistos hasta ahora tienen dimensión infinita, no pueden hallarse en computadora.

Veremos ahora cómo el MEF construye aproximaciones de dimensión finita a las soluciones de (V) y (M).

## (1.2) MEF p/problema modelo c/funciones lineales p/tramos

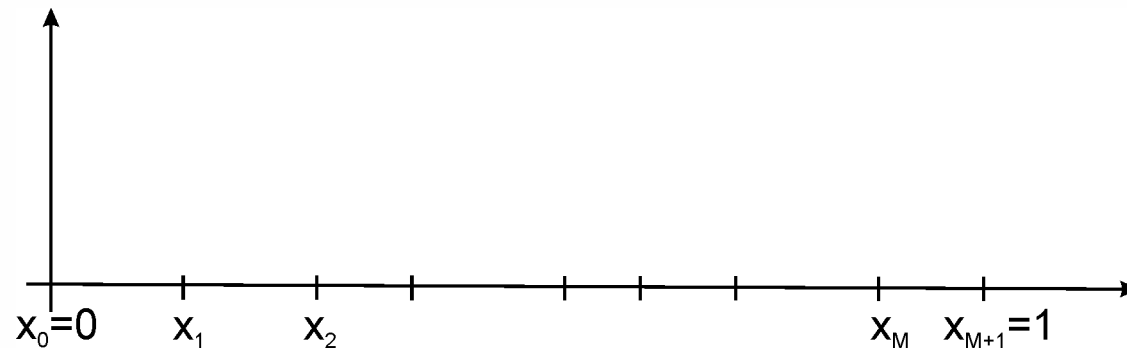
1. Construiremos un subespacio de dimensión finita  $V_h$  del espacio  $V$ , consistente en funciones lineales p/tramos.
2. Sea

$$0 = x_0 < x_1 \cdots x_M < x_{M+1} = 1$$

una partición del intervalo  $(0,1)$  en  $M+1$  subintervalos  $I_j = (x_{j-1}, x_j)$  de longitud

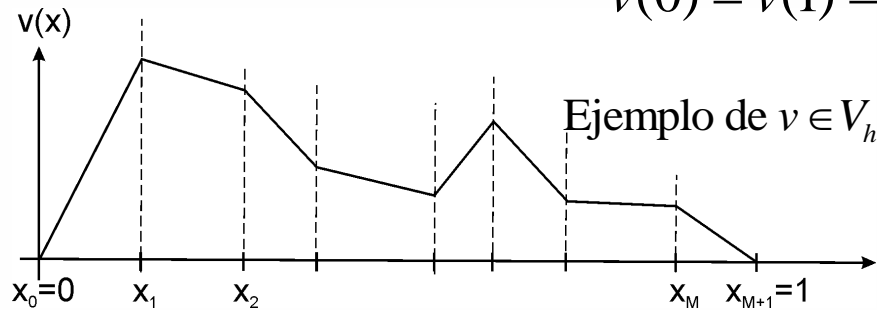
$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad j = 1, \dots, M+1$$

La cantidad  $h = \max h_j$  es una medida de la densidad de la partición.



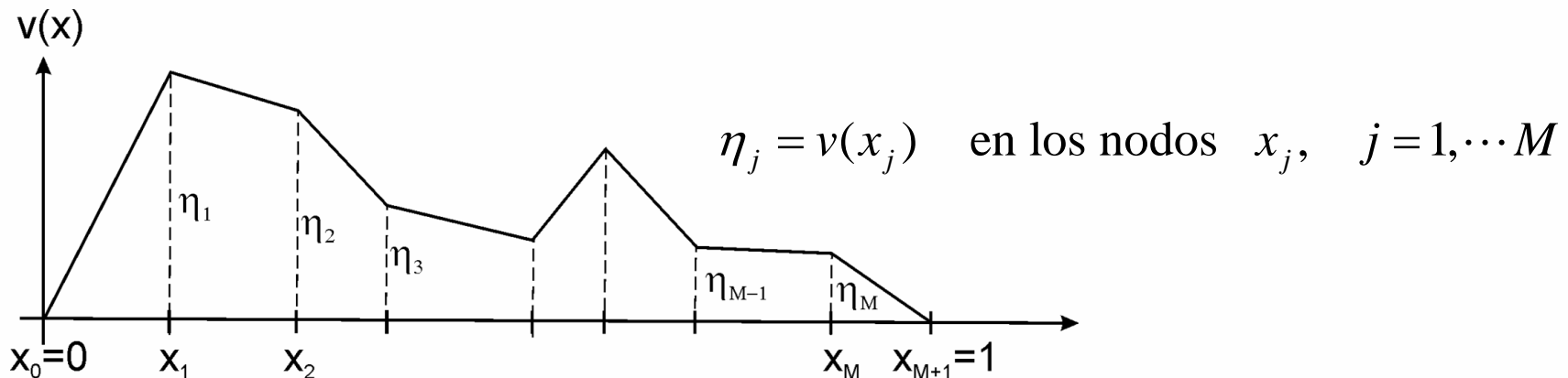
# Subespacio de funciones lineales por tramos

1. Sea  $V_h = \left\{ v / \begin{array}{l} v \text{ es lineal en cada subintervalo } I_j \\ v \text{ es continua en el } [0,1] \\ v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right\}$



Notar que  $V_h \subset V$

2. Para describir  $v \in V_h$  elegimos los valores

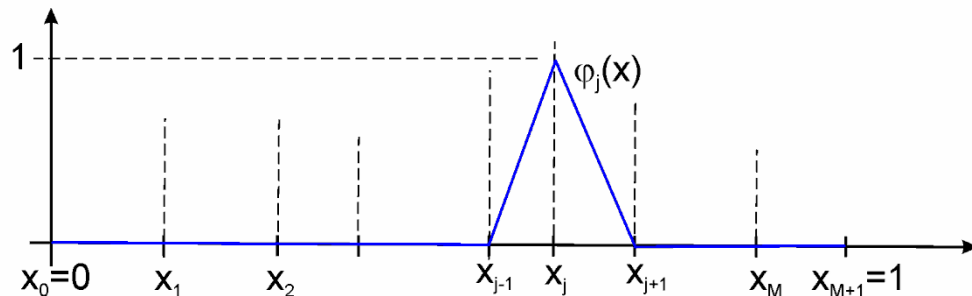




## Subespacio de funciones lineales por tramos

3. Definimos funciones de base  $\varphi_j(x) \in V_h$ ,  $j = 1, \dots, M$

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, M$$



$\varphi_j(x)$ : función continua  
lineal por tramos que verifica  
la propiedad *delta*.

4. Toda función  $v \in V_h$  puede ser escrita en forma única como combinación lineal de las funciones de base  $\varphi_i(x)$  :

$$v(x) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(x) \quad x \in [0,1] \quad , \quad \eta_i = v(x_i)$$

Luego,  $V_h$  es un espacio vectorial lineal de dimensión  $M$  con base:  $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$

## MEF para problema modelo (D)

1. Formulación como problema de minimización discreto:

$$(M_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \quad / \quad F(u_h) \leq F(v) \quad \forall v \in V_h \quad (\text{método Ritz})$$

2. De la manera ya vista, es **equivalente** al problema variacional discreto:

$$(1.2) \quad (V_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \quad / \quad (u_h', v') = (f, v) \quad \forall v \in V_h \quad (\text{método Galerkin})$$

3. Notar, que si  $u_h \in V_h$  satisface (1.2), luego en particular

$$(1.3) \quad (u_h', \varphi_j') = (f, \varphi_j) \quad j = 1, \dots, M$$

(además, si se cumple (1.3), luego vale (1.2)  $\forall v \in V_h$  )

4. Siendo  $u_h(x) = \sum_{i=1}^M \xi_i \varphi_i(x)$  ,  $\xi_i = u_h(x_i)$  , escribimos (1.3) en la forma:

$$\sum_{i=1}^M \xi_i (\varphi_i', \varphi_j') = (f, \varphi_j) \quad j = 1, \dots, M$$

Sistema de M ecuaciones algebraicas lineales con M incógnitas  $\xi_i$

## Forma matricial

$$(1.5) \quad \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1', \varphi_1') & (\varphi_1', \varphi_2') & \cdots & (\varphi_1', \varphi_M') \\ (\varphi_2', \varphi_1') & (\varphi_2', \varphi_2') & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (\varphi_M', \varphi_1') & \cdots & & (\varphi_M', \varphi_M') \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{A}$  : matriz de rigidez

$\mathbf{b}$  : vector de cargas

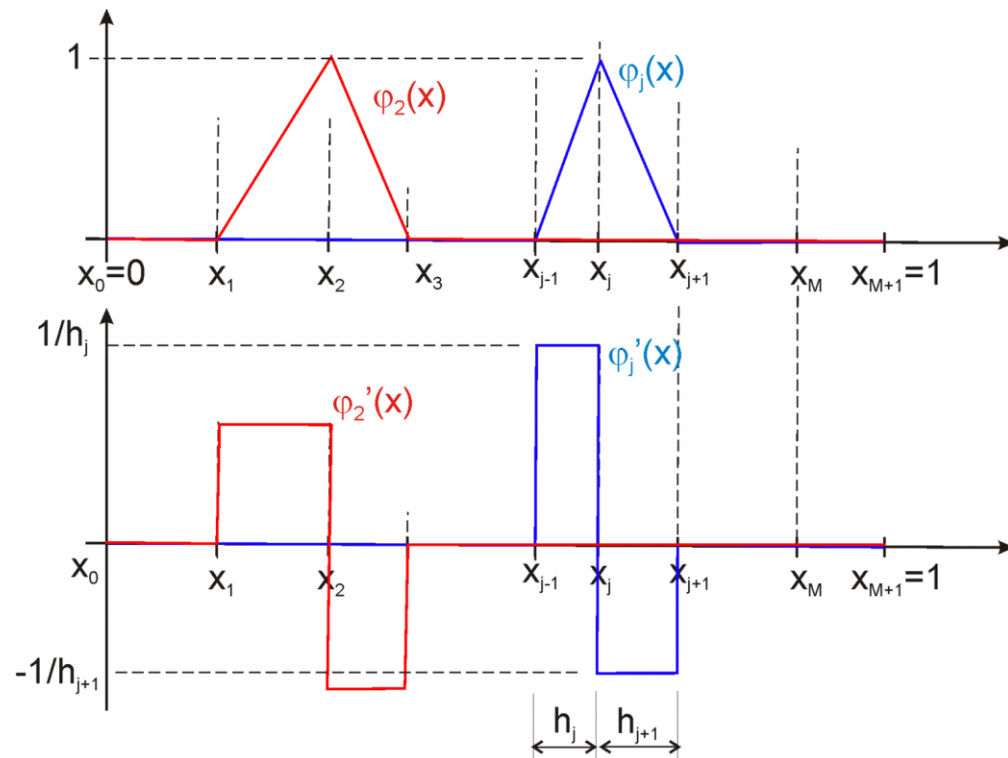
$$b_i = (f, \varphi_i)$$

Los elementos  $a_{ij} = (\varphi_i', \varphi_j')$  pueden calcularse fácilmente.

Notar:

$$(\varphi_i', \varphi_j') = 0 \quad \text{si } |i - j| > 1$$

Luego  $\mathbf{A}$  es tridiagonal



## Sistema de ecuaciones

Entonces:

$$a_{jj} = (\varphi_j', \varphi_j') = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h_{j+1}^2} dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \quad j = 1, \dots, M$$

$$a_{j(j-1)} = (\varphi_j', \varphi_{j-1}') = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} dx = -\frac{1}{h_j} \quad j = 2, \dots, M$$

1. **A** es simétrica pues:  $(\varphi_i', \varphi_j') = (\varphi_j', \varphi_i')$

2. **A** es definida positiva pues siendo  $v(x) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(x)$  luego:

$$\sum_{i,j=1}^M \eta_i (\varphi_i', \varphi_j') \eta_j = \left( \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i', \sum_{j=1}^M \eta_j \varphi_j' \right) = (v', v') \geq 0 \quad \begin{cases} > 0 & \text{casi siempre} \\ = 0 & \text{solo si } v' = 0 \end{cases}$$

Como  $v(0) = 0$  luego  $(v', v') = 0 \Leftrightarrow v = 0$  o sea:  $\eta_j = 0 \quad j = 1, M$

Entonces:

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} > 0 \quad \forall \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^M, \boldsymbol{\eta} \neq 0$$

**A simétrica y definida positiva**

## Propiedades sistema de ecuaciones (1.5)

1.  $\mathbf{A} \text{ sim} > 0 \implies \mathbf{A}$  es no singular y el sistema (1.5) tiene solución única
2.  $\mathbf{A}$  es rala, o sea pocos elementos de  $\mathbf{A}$  son distintos de cero.

Esto se debe a que  $\varphi_j$  tiene soporte local ( $\varphi_j \neq 0$  en un intervalo pequeño, interfiriendo con pocas funciones  $\varphi_k$ ).

3. Si la partición es uniforme,  $h_j = h = \frac{1}{M+1}$  y logramos

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

### (1.3) Estimación de error del MEF para problema modelo

Sean  $u$  solución de (D)  $\left\{ \begin{array}{l} -u'' = f(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$

$u_h$  solución de ( $V_h$ )      Hallar  $u_h \in V_h$  /  $(u_h', v') = (f, v) \quad \forall v \in V_h$

Recordando que

$$(u', v') = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (\text{en particular } \forall v \in V_h)$$

y como  $V_h \subset V$

$$\boxed{((u - u_h)', v') = 0 \quad \forall v \in V_h}$$

Ecuación del error

donde  $u - u_h$  es el error de la aproximación

Veremos que en cierto modo,  $u_h$  es la mejor aprox posible a la sol exacta  $u$

Norma asociada al producto escalar  $(, )$ :  $\|w\| \triangleq (w, w)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^1 w^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

Desigualdad de Cauchy:

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$$

# Estimación de error del MEF para problema modelo

Teo 1.1)

$$\| (u - u_h)' \| \leq \| (u - v)' \| \quad \forall v \in V_h$$

D) Sean  $v \in V_h$  arbitraria y  $w = u_h - v \in V_h$ . Reemplazando  $v$  por  $w$  en la ecuación del error:

$$\begin{aligned} \| (u - u_h)' \|^2 &= \underbrace{\left( (u - u_h)', (u - u_h)' \right)}_{=0 \text{ ecuacion del error}} + \left( (u - u_h)', w' \right) = \left( (u - u_h)', (u - u_h + w)' \right) = \\ &= \left( (u - u_h)', (u - v)' \right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \| (u - u_h)' \| \| (u - v)' \| \quad \forall v \in V_h \end{aligned}$$

Luego  $\| (u - u_h)' \| \leq \| (u - v)' \| \quad \forall v \in V_h$  ■

Para lograr una estimación cuantitativa del error, usamos una  $\tilde{u}_h \in V_h$  elegida convenientemente. Por el resultado anterior:

$$\| (u - u_h)' \| \leq \| (u - \tilde{u}_h)' \|$$

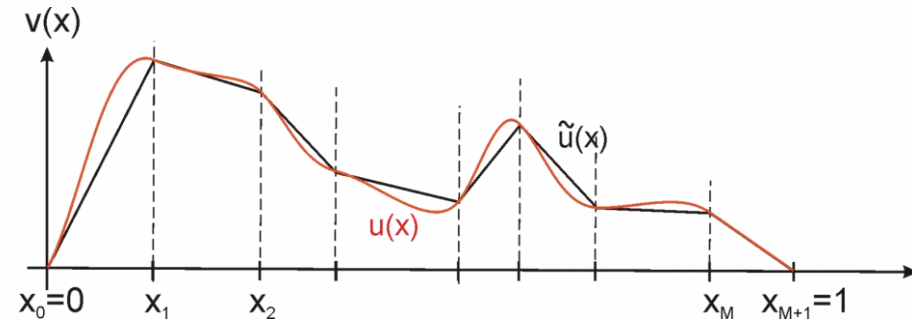
## Estimación del error

Haremos  $\tilde{u}_h \in V_h$  interpolante de  $u$ , o sea:

$$\tilde{u}_h(x_j) = u(x_j) \quad j = 0, \dots, M+1$$

En *Análisis Numérico*, se ve que:

$$|u'(x) - \tilde{u}'_h(x)| \leq h \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)|$$



$$|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)|$$

Luego, por el teorema y (1.12):

$$\| (u - u_h)' \| \leq h \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)|$$

Mediante análisis detallado, se puede mostrar :

$$\| (u - u_h) \| \leq o(h^2) \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)|$$

Notar:

- No necesitamos construir explícitamente  $\tilde{u}_h$ , sino sólo la estimación de error del interpolante.
- $u'$  es una deformación o tensión, y tiene interés práctico la estimación de su error



## Cálculo matriz rigidez

1. Los coeficientes  $a_{ij} = (\varphi_i', \varphi_j')$  son calculados por suma de contribuciones de los distintos segmentos:

$$(\varphi_i', \varphi_j') = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx = \sum_{I_K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i' \varphi_j' dx = \sum_{I_K} (\varphi_i', \varphi_j')_K$$

Notar que

$$(\varphi_i', \varphi_j')_K \neq 0 \quad \text{sólo si} \quad N_i, N_j \in I_K$$

2. Sean  $(k-1)$  y  $k$  los nodos del segmento  $K$ . Luego, la matriz de rigidez del “elemento”  $K$  :

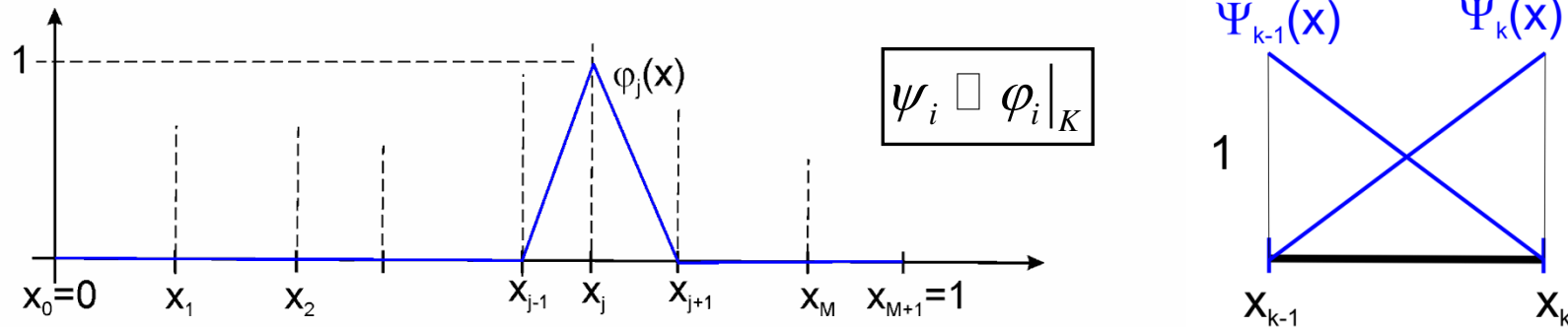
$$\mathbf{A}_K \square \begin{bmatrix} (\varphi_{k-1}', \varphi_{k-1}')_K & (\varphi_{k-1}', \varphi_k')_K \\ \text{sim.} & (\varphi_k', \varphi_k')_K \end{bmatrix}$$

3. La matriz de rigidez global  $\mathbf{A}$  es armada luego en 2 etapas:
  1. Cálculo de las matrices de rigidez elementales
  2. Sumatoria de las contribuciones de cada elemento (ensamble)

El vector de cargas  $\mathbf{b}$  es armado de la misma manera.

# Cálculo matriz rigidez elemental

1. Trabajamos con las restricciones de las funciones de base al segmento  $K$ :



2.  $\psi_i$  es una función lineal /

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{en el nodo } i \\ 0 & \text{en el nodo } j \end{cases}$$

$$\{\psi_{k-1}(x), \psi_k(x)\} \text{ base de fcs lineales en } K$$

3. Si  $w(x)$  es una función lineal en  $K$ , tiene luego la representación:

$$w(x) = w(x_{k-1})\psi_{k-1}(x) + w(x_k)\psi_k(x)$$

4. La matriz de rigidez elemental:

$$\mathbf{A}_K \triangleq \begin{bmatrix} (\psi_{k-1}', \psi_{k-1}')_K & (\psi_{k-1}', \psi_k')_K \\ \text{sim.} & (\psi_k', \psi_k')_K \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

$$\psi_i(x) = \alpha_i + \beta_i x$$

$$\alpha_i, \beta_i \quad / \quad \psi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\alpha_{k-1} = \frac{x_k}{h_K} \quad \beta_{k-1} = -\frac{1}{h_K}$$

$$\alpha_k = -\frac{x_{k-1}}{h_K} \quad \beta_k = \frac{1}{h_K}$$

$$h_K = x_k - x_{k-1} \quad (\text{longitud segmento})$$

Luego:

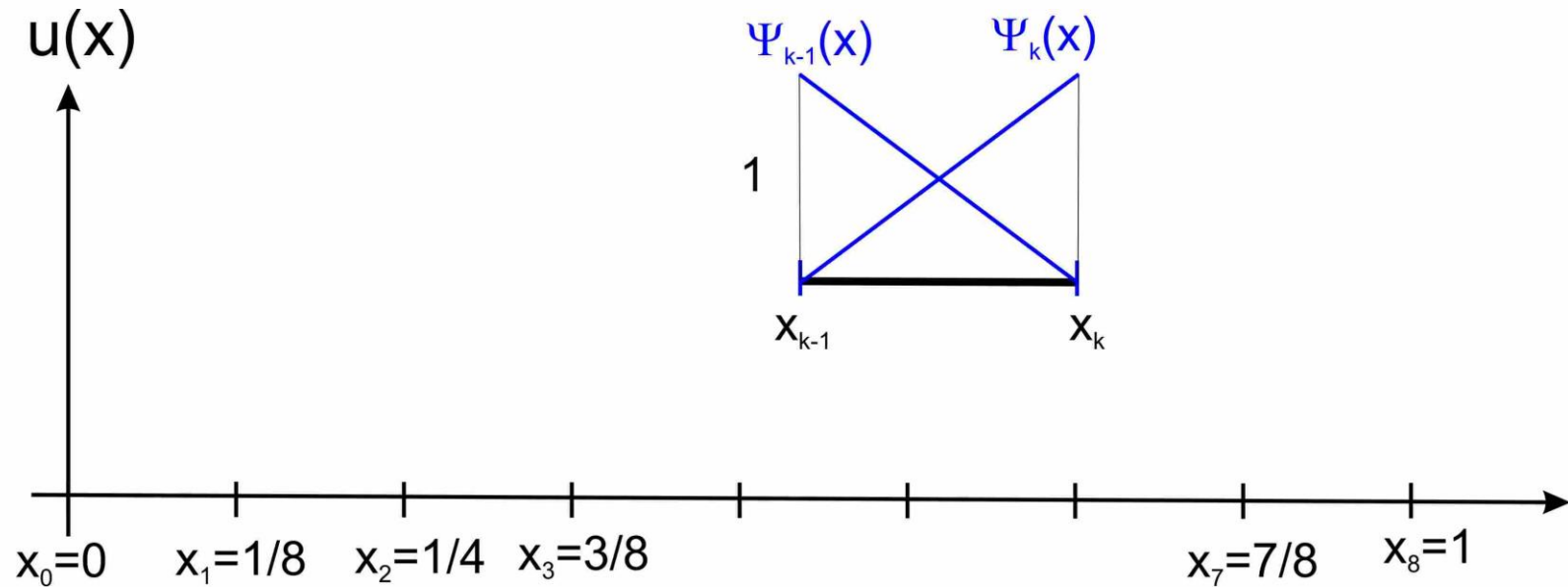
$$(\psi_{k-1}', \psi_{k-1}')_K = \int_K \frac{d\psi_{k-1}}{dx} \frac{d\psi_{k-1}}{dx} dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \beta_{k-1} \beta_{k-1} dx = \beta_{k-1}^2 h_K = \frac{1}{h_K}$$

$$(\psi_{k-1}', \psi_k')_K = \int_K \frac{d\psi_{k-1}}{dx} \frac{d\psi_k}{dx} dx = \beta_{k-1} \beta_k h_K = -\frac{1}{h_K}$$

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_K} & -\frac{1}{h_K} \\ -\frac{1}{h_K} & \frac{1}{h_K} \end{bmatrix}$$

# Ejemplo

Ilustraremos el proceso de ensamble para el caso siguiente:



Elemento 1)  $k-1=0; k=1$

$$\mathbf{A}_1 \xi^1 = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$

$\psi_0(x) = 0$  por condición de borde

# Ensamble primer elemento

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}^1 = 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = 8 \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Ensamble segundo elemento

$$\mathbf{A}_2 \xi^2 = 8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \xi = 8 \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Ensamble tercer elemento

$$\mathbf{A}_3 \boldsymbol{\xi}^3 = 8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = 8 \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Ensamble cuarto elemento

$$\mathbf{A}_4^{\xi^4} = 8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A}^{\xi} = 8 \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$



## Ensamble séptimo elemento

$$\mathbf{A}_7^{\xi^7} = 8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A}^{\xi} = 8 \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & -1 & 1+1 & -1 & & \\ & & & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Ensamble octavo elemento

$$A_8 \xi^8 = 8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{57} \\ \xi_{58} \end{Bmatrix}$$



$$A \xi = 8 \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & -1 & 1+1 & -1 & & \\ & & & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & & & -1 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Sistema de ecuaciones global

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{8} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{Bmatrix}$$

El término a derecha puede calcularse también elemento por elemento:

$$\mathbf{b}^K = \begin{Bmatrix} b_{k-1}^K \\ b_k^K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi_{k-1}(x) f(x) dx \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi_k(x) f(x) dx \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1^1 + b_1^2 \\ b_2^2 + b_2^3 \\ b_3^3 + b_3^4 \\ b_4^4 + b_4^5 \\ b_5^5 + b_5^6 \\ b_6^6 + b_6^7 \\ b_7^7 + b_7^8 \end{Bmatrix}$$

La ecuación es idéntica a la que se obtiene por diferencias finitas. El término a derecha cambia.

## Ejemplo

Sea la ecuación:

$$\begin{aligned} -u'' &= \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Solución exacta:

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$$

El vector de cargas elemental:

$$\mathbf{b}^K = \begin{Bmatrix} b_{k-1}^K \\ b_k^K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_k - x}{h_k} \sin(\pi x) dx \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x - x_{k-1}}{h_k} \sin(\pi x) dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\cos(\pi x_{k-1})}{\pi} - \frac{\sin(\pi x_k) - \sin(\pi x_{k-1})}{\pi^2 h_k} \\ -\frac{\cos(\pi x_k)}{\pi} + \frac{\sin(\pi x_k) - \sin(\pi x_{k-1})}{\pi^2 h_k} \end{Bmatrix}$$

## Ejemplo (programa Matlab / Octave)

```
% cantidad de elementos
n = 8;
```

```
% inicializacion de matriz de rigidez y vector de cargas globales
A = zeros(n-1,n-1);
b = zeros(n-1,1);
```

```
% lazo sobre los elementos
for k=1:n
```

```
    hk = 1/n;
    %coordenadas del elemento k
    xk1 = (k-1)* hk;
    xk = k * hk;
```

```
    % matriz de rigidez elemental
    Ak = 1/hk* [1 -1;
               -1 1];
```

```
    %vector de cargas elemental
    bk = [cos(pi*xk1)/pi - (sin(pi*xk)-sin(pi*xk1))/pi^2/hk;
          -cos(pi*xk) /pi + (sin(pi*xk)-sin(pi*xk1))/pi^2/hk];
```

```
    %ensamble de matriz de rigidez
```

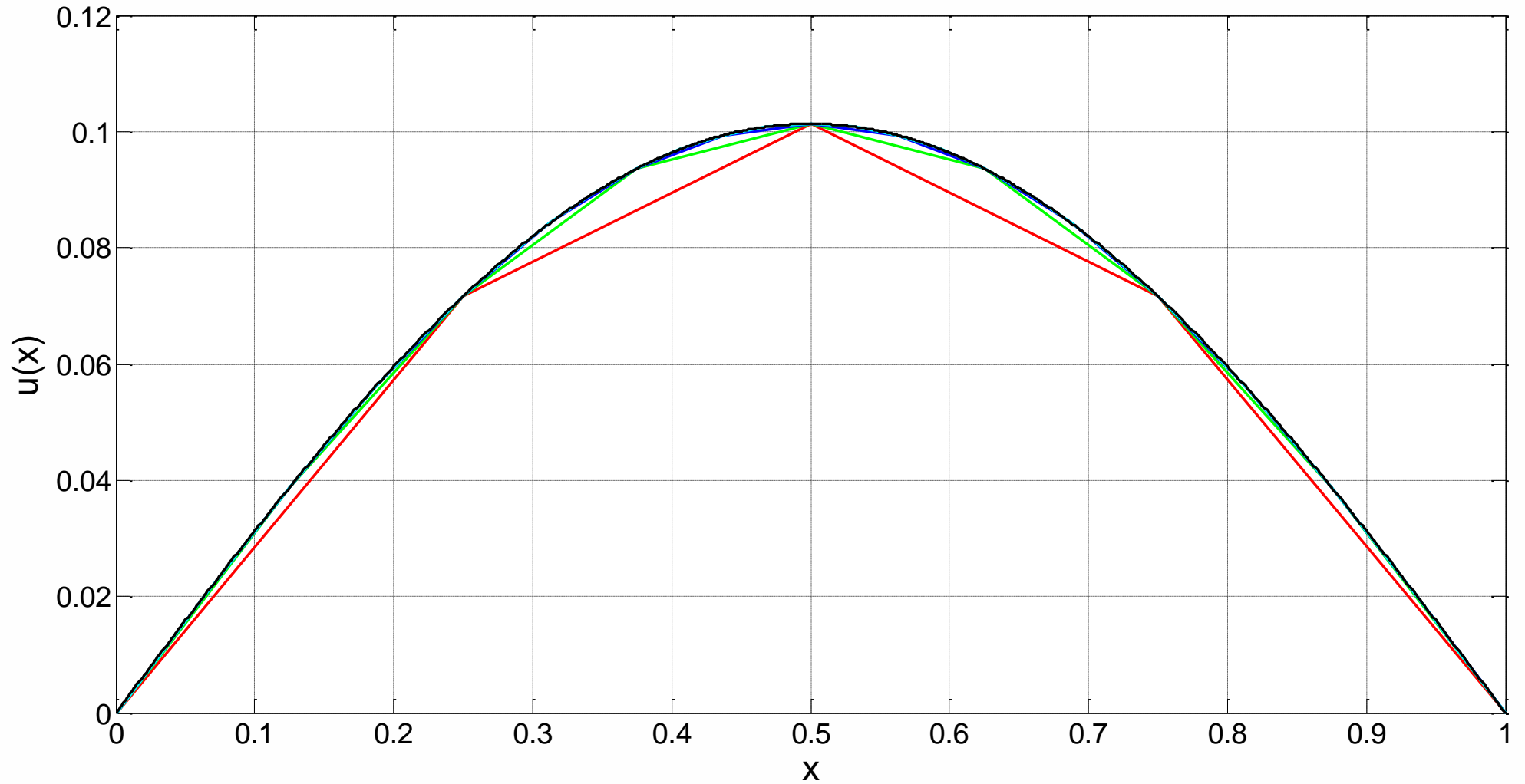
```
        if (k==1)
            A(1,1) = A(1,1) + Ak(2,2);
        elseif (k==n)
            A(n-1,n-1) = A(n-1,n-1) + Ak(1,1);
        else
            A(k-1,k-1) = A(k-1,k-1) + Ak(1,1); A(k-1,k) = A(k-1,k) + Ak(1,2);
            A(k,k-1) = A(k,k-1) + Ak(2,1); A(k,k) = A(k,k) + Ak(2,2);
        end
```

```
    %ensamble de vector de cargas
```

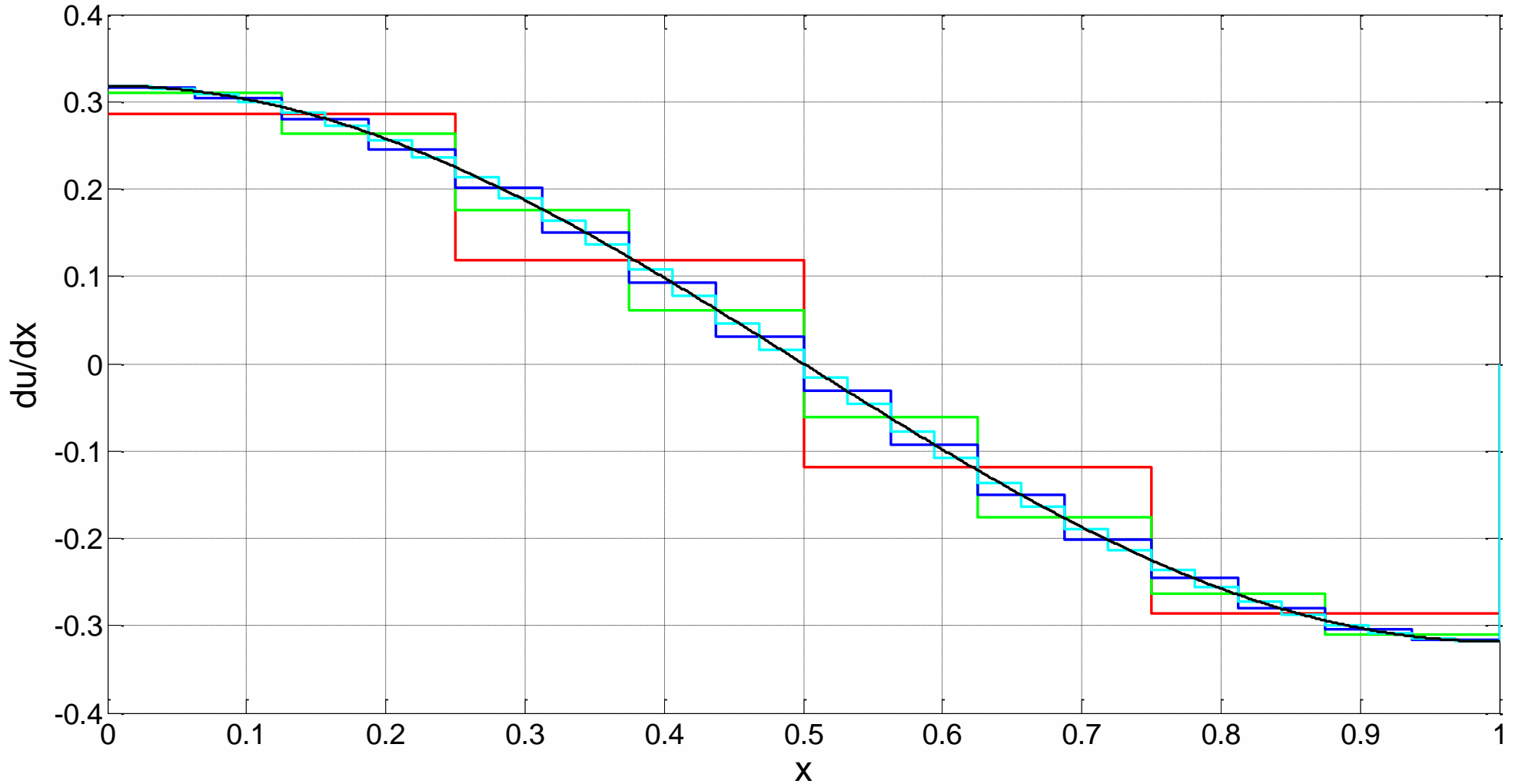
```
        if (k==1)
            b(1) = b(1) + bk(2);
        elseif (k==n)
            b(n-1) = b(n-1) + bk(1,1);
        else
            b(k-1) = b(k-1) + bk(1);
            b(k) = b(k) + bk(2);
        end
```

```
end
```

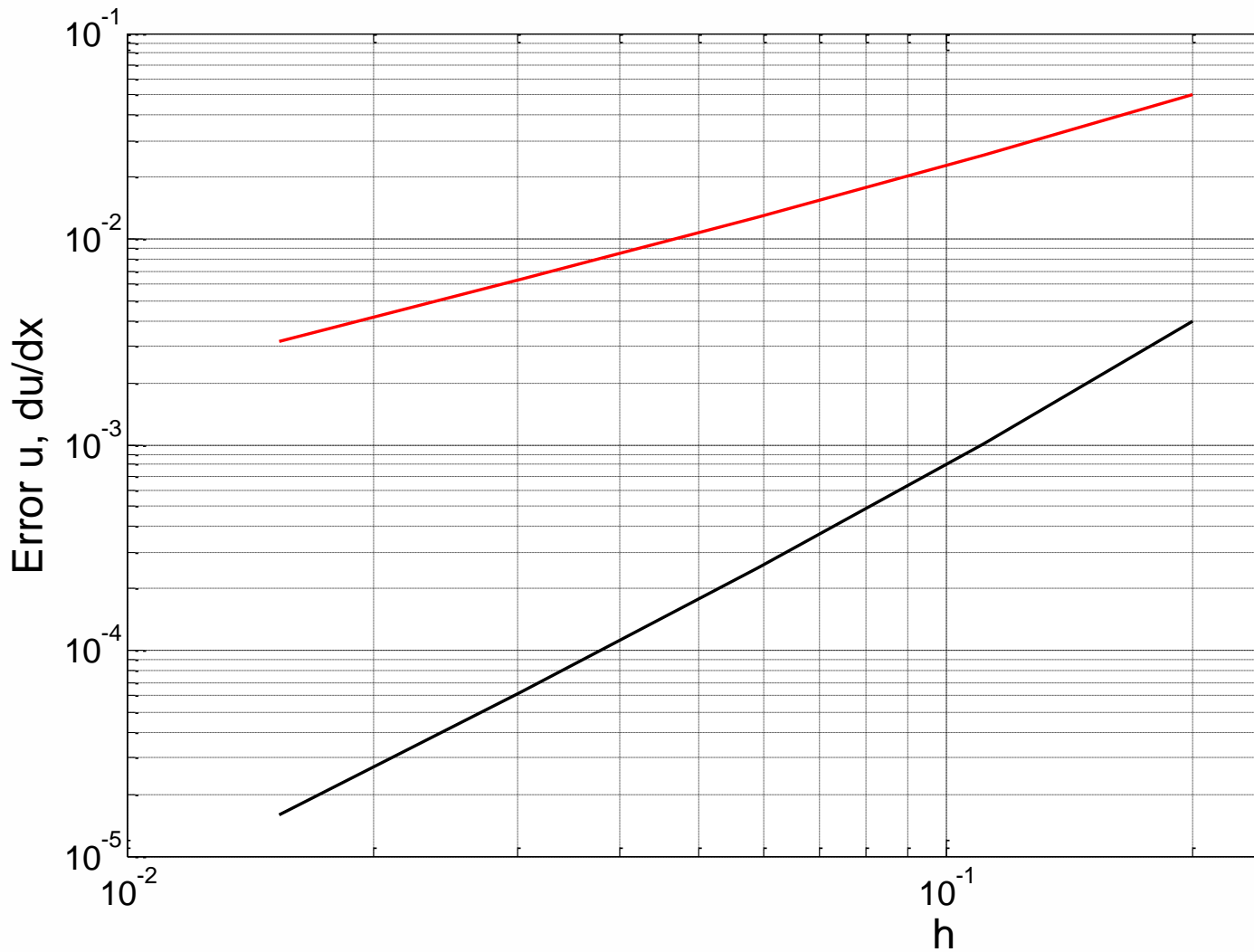
## Ejemplo: aproximación a la solución



# Ejemplo: aproximación a la derivada



## Ejemplo: tasa de convergencia

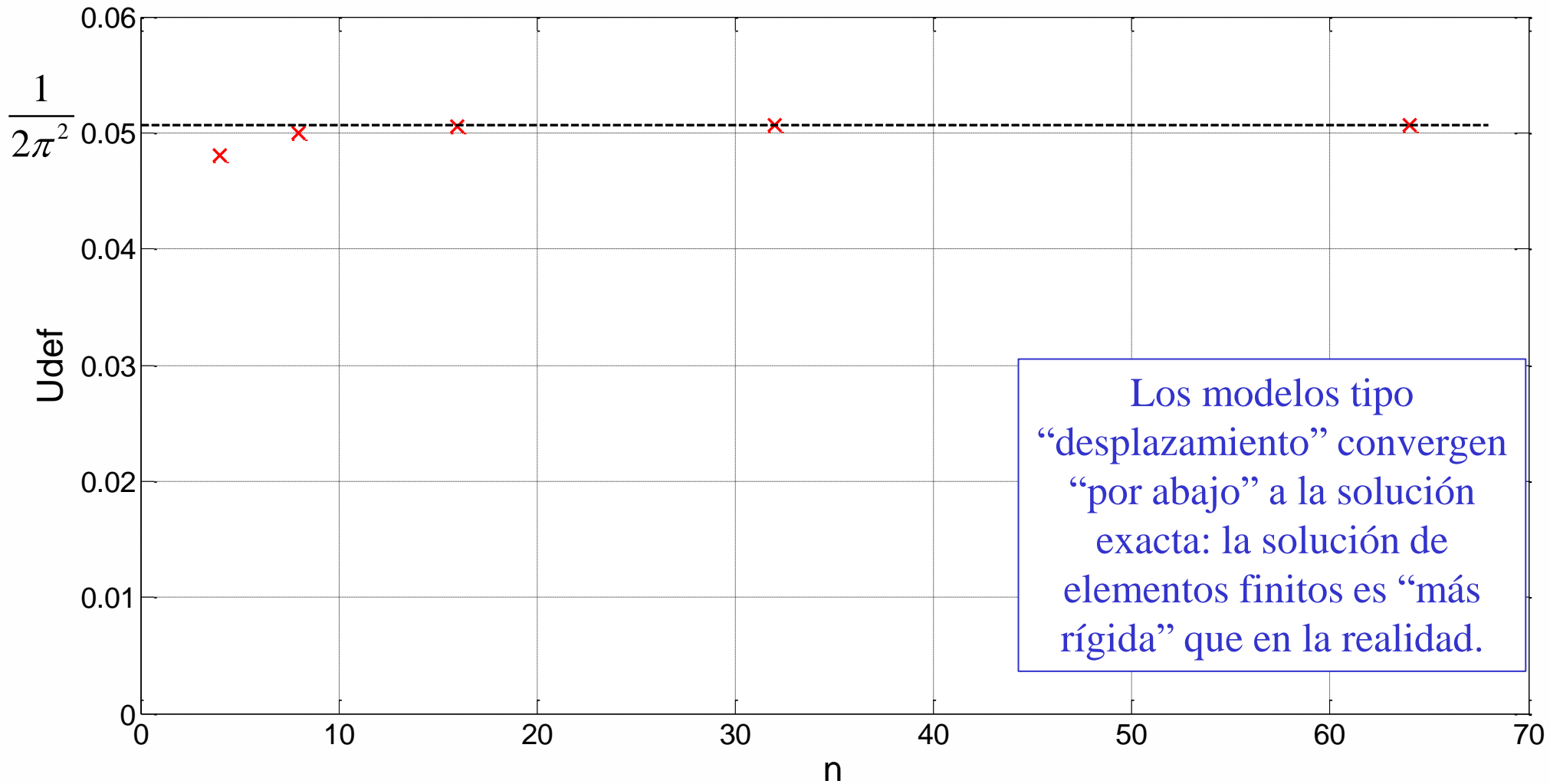


Derivada:  
convergencia  
lineal

Función:  
convergencia  
cuadrática



## Ejemplo: convergencia en energía



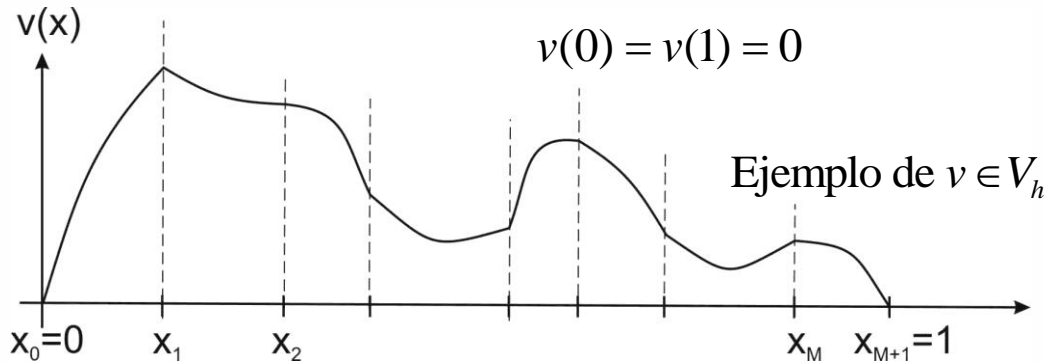
# Elementos finitos unidimensionales de alto orden

1. Sea  $V_h = \{v / v \text{ es polinomio de grado } r \text{ en cada subintervalo } I_j$

$v \text{ es continua en el } [0,1]$

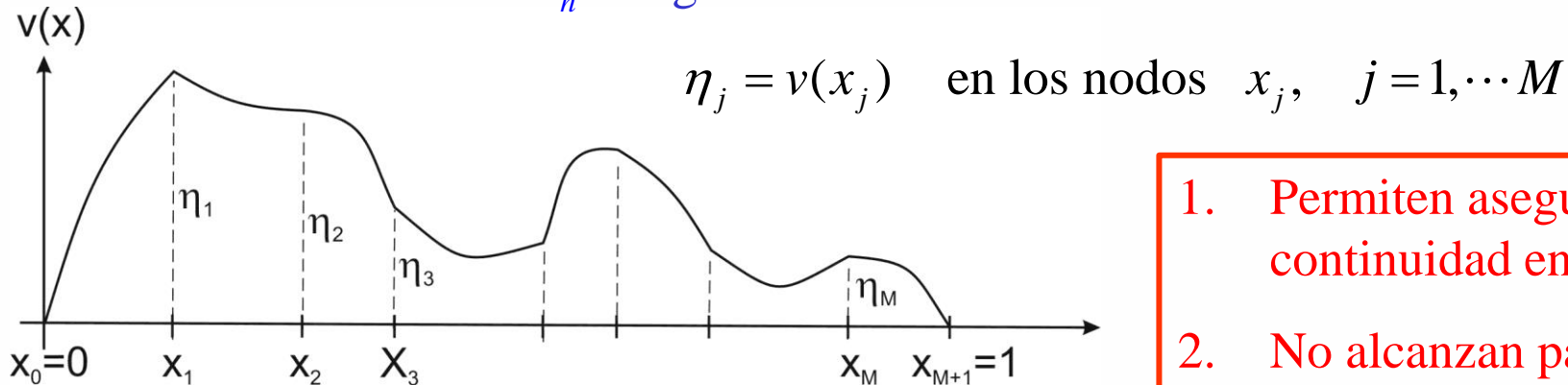
$v(0) = v(1) = 0$

}



Notar que  $V_h \subset V$

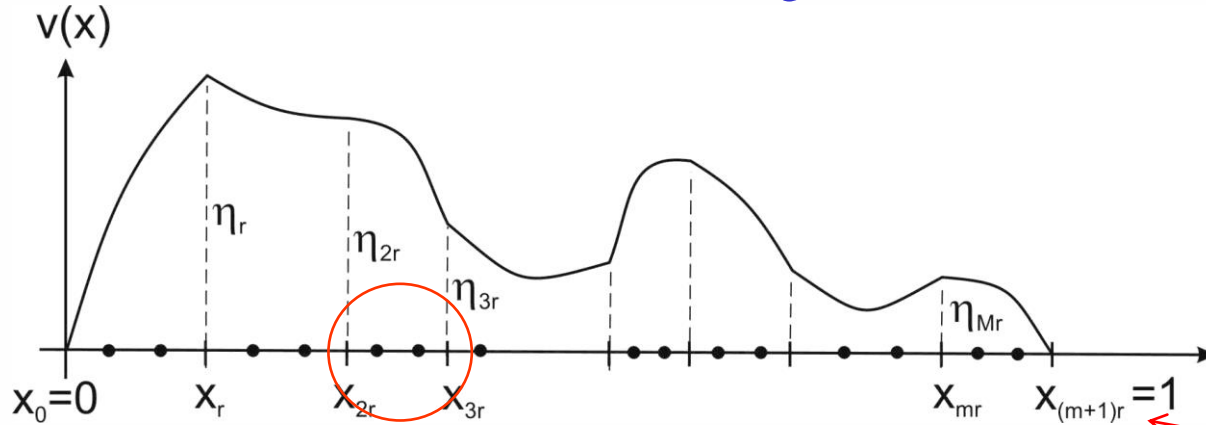
2. Para describir  $v \in V_h$  elegimos los valores



1. Permiten asegurar la continuidad entre nodos
2. No alcanzan para determinar el polinomio en el tramo

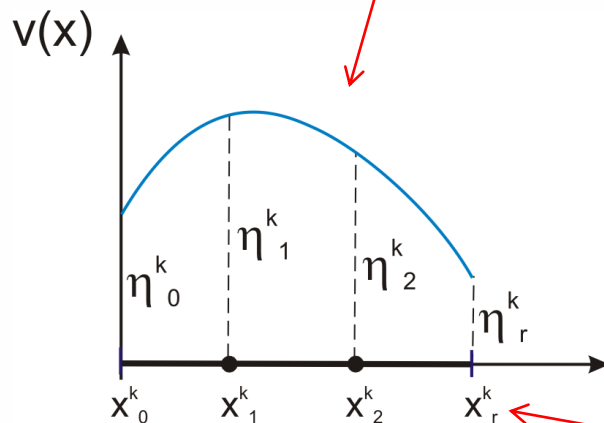
## Elementos finitos unidimensionales de alto orden (cont)

3. Insertamos  $(r-1)$  nodos en cada segmento :



Numeración global

4. Interpolación de un polinomio de grado  $r$  en el segmento  $k$ :



$$v(x) = \sum_{i=0}^r \eta_i^k \psi_i^k(x) = \sum_{i=0}^r \eta_i \psi_i(x)$$

$\{\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_r(x)\}$   
 base de polinomios grado  $r$  en  $k$

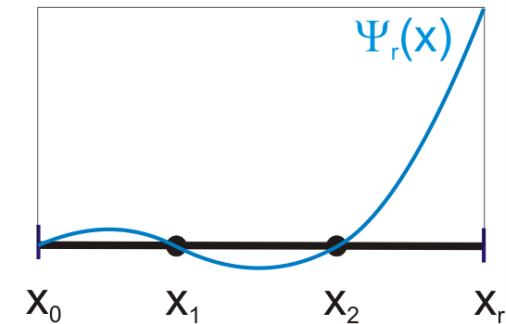
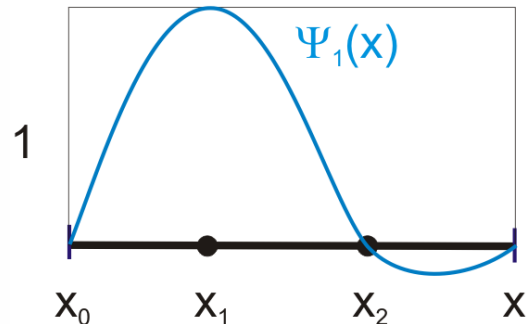
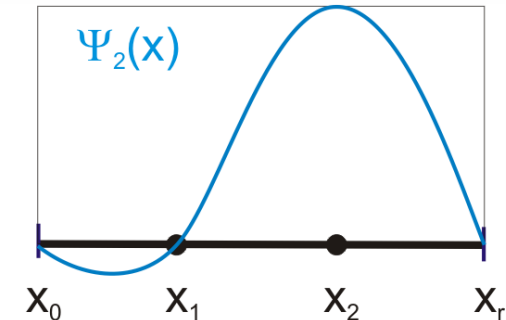
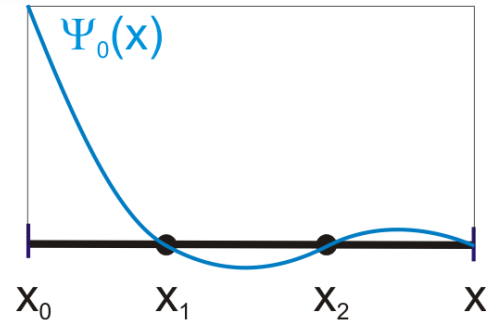
Numeración local

## Elementos finitos unidimensionales de alto orden (cont)

5. Los polinomios  $\psi_i$  son polinomios de grado  $r$  tales que verifican:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } x_i \\ 0 & \text{en } x_j, \quad \forall j \neq i \end{cases} \quad i = 0, \dots, r$$

Son base del espacio de polinomios de grado  $r$  pues constituyen un conjunto de  $r+1$  funciones del espacio linealmente independientes



Bases polinómicas de Lagrange grado  $r$ :

$$\psi_i(x) = \prod_{j=0, r; j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_r)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_r)}$$

## Elementos finitos unidimensionales de alto orden (cont)

### 1. Funciones de base lineales

$$\psi_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \quad \psi_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

### 2. Funciones de base cuadráticas

$$\psi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \psi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad \psi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

### 3. Funciones de base cúbicas

.....

## Ejemplo

Sea la ecuación:

$$-u'' = \sin(\pi x) \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Solución exacta:

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$$

Asumiendo funciones cuadráticas por tramos:

$$\mathbf{A}_K \triangleq \begin{bmatrix} (\psi_0', \psi_0')_K & (\psi_0', \psi_1')_K & (\psi_0', \psi_2')_K \\ & (\psi_1', \psi_1')_K & (\psi_1', \psi_2')_K \\ \text{sim.} & & (\psi_2', \psi_2')_K \end{bmatrix}$$

$$\psi_0'(x) = \frac{(2x - x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$\psi_1'(x) = \frac{(2x - x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$\psi_2'(x) = \frac{(2x - x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

## Ejemplo

Asumiremos una partición equiespaciada:

$$h = x_i - x_{i-1} \quad (\text{distancia entre nodos}) \quad \Rightarrow \quad \text{tamaño elementos} = 2h$$

$$(\psi'_0, \psi'_0)_K = \int_{x_0}^{x_2} \psi'_0 \psi'_0 dx = \int_0^{2h} \left( \frac{2x - h - 2h}{h \cdot 2h} \right)^2 dx = \frac{7}{6h}$$

$$(\psi'_0, \psi'_1)_K = \dots$$

Cálculo por manipulación simbólica (Matlab):

```
syms h x
psi0p = (2*x-h-2*h)/((-h)*(-2*h));
psi1p = (2*x-2*h)/((h)*(-h));
psi2p = (2*x-h)/((2*h)*(h));
```

```
A00 = int(psi0p*psi0p,0,2*h)
A01 = int(psi0p*psi1p,0,2*h)
A02 = int(psi0p*psi2p,0,2*h)
A11 = int(psi1p*psi1p,0,2*h)
A12 = int(psi1p*psi2p,0,2*h)
A22 = int(psi2p*psi2p,0,2*h)
```

Notar que  $\psi_i(x), \psi'_i(x)$  son invariantes a una traslación  $x \Rightarrow x + C$ .

$$\mathbf{A}_K = \frac{1}{6h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ & 16 & -8 \\ \text{sim} & & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^K = \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \frac{(x-x_{2k-1})(x-x_{2k})}{(-h)(-2h)} \sin(\pi x) dx \\ \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \frac{(x-x_{2k-2})(x-x_{2k})}{(h)(-h)} \sin(\pi x) dx \\ \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \frac{(x-x_{2k-2})(x-x_{2k-1})}{(2h)(h)} \sin(\pi x) dx \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{(2k-2)h}^{2kh} \frac{(x-(2k-1)h)(x-2kh)}{2h^2} \sin(\pi x) dx \\ \int_{(2k-2)h}^{2kh} -\frac{(x-(2k-2)h)(x-2kh)}{h^2} \sin(\pi x) dx \\ \int_{(2k-2)h}^{2kh} \frac{(x-(2k-2)h)(x-(2k-1)h)}{2h^2} \sin(\pi x) dx \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{b}^K = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(2\pi(k-1)h)}{\pi} + \frac{\cos(2\pi kh) - \cos(2\pi(k-1)h)}{\pi^3 h^2} + \frac{3\sin(2\pi(k-1)h) + \sin(2\pi kh)}{2\pi^2 h} \\ -2 \left( \frac{\cos(2\pi kh) - \cos(2\pi(k-1)h)}{\pi^3 h^2} + \frac{\sin(2\pi(k-1)h) + \sin(2\pi kh)}{\pi^2 h} \right) \\ -\frac{\cos(2\pi kh)}{\pi} + \frac{\cos(2\pi kh) - \cos(2\pi(k-1)h)}{\pi^3 h^2} + \frac{\sin(2\pi(k-1)h) + 3\sin(2\pi kh)}{2\pi^2 h} \end{array} \right\}$$



# Programa

```
function [u,Udef] = ejemplocuadratico(n)
```

```
% inicializacion de matriz de rigidez y vector de cargas globales
```

```
A = zeros(2*n-1,2*n-1);
```

```
b = zeros(2*n-1,1);
```

```
% lazo sobre los elementos
```

```
for k=1:n
```

```
    h = 1/(2*n);
```

```
% coordenadas del elemento k
```

```
xk0 = (2*k-2)*h;
```

```
xk1 = (2*k-1)*h;
```

```
xk2 = 2*k *h;
```

```
% matriz de rigidez elemental
```

```
Ak = 1/(6*h)* [7 -8 1;
```

```
               -8 16 -8;
```

```
               1 -8 7];
```

```
% vector de cargas elemental
```

```
bk = [cos(2*pi*h*k - 2*pi*h)/pi + (cos(2*pi*h*k) - cos(2*h*k*pi - 2*h*pi) ...
```

```
      + pi*h*((3*sin(2*pi*h*k - 2*pi*h))/2 + sin(2*pi*h*k/2))/(pi^3*h^2);
```

```
      -(2*cos(2*pi*h*k) - 2*cos(2*pi*h*k - 2*pi*h) + ...
```

```
      pi*h*(2*sin(2*pi*h*k - 2*pi*h) + 2*sin(2*pi*h*k)))/(pi^3*h^2);
```

```
      (cos(2*pi*h*k) - cos(2*h*k*pi - 2*h*pi) + pi*h*(sin(2*pi*h*k - 2*pi*h)/2 ...
```

```
      + (3*sin(2*pi*h*k)/2))/(pi^3*h^2) - cos(2*pi*h*k)/pi];
```

```
%ensamble de matriz de rigidez
```

```
if (k==1)
```

```
    A(1,1) = A(1,1) + Ak(2,2); A(1,2) = A(1,2) + Ak(2,3);
```

```
    A(2,1) = A(2,1) + Ak(3,2); A(2,2) = A(2,2) + Ak(3,3);
```

```
elseif (k==n)
```

```
    A(2*n-2,2*n-2) = A(2*n-2,2*n-2) + Ak(1,1);
```

```
    A(2*n-2,2*n-1) = A(2*n-2,2*n-1) + Ak(1,2);
```

```
    A(2*n-1,2*n-2) = A(2*n-1,2*n-2) + Ak(2,1);
```

```
    A(2*n-1,2*n-1) = A(2*n-1,2*n-1) + Ak(2,2);
```

```
else
```

```
    A(2*k-2,2*k-2) = A(2*k-2,2*k-2) + Ak(1,1);
```

```
    A(2*k-2,2*k-1) = A(2*k-2,2*k-1) + Ak(1,2);
```

```
.....
```

```
end
```

```
%ensamble de vector de cargas
```

```
if (k==1)
```

```
    b(1) = b(1) + bk(2);
```

```
    b(2) = b(2) + bk(3);
```

```
elseif (k==n)
```

```
    b(2*n-2) = b(2*n-2) + bk(1);
```

```
    b(2*n-1) = b(2*n-1) + bk(2);
```

```
else
```

```
    b(2*k-2) = b(2*k-2) + bk(1);
```

```
.....
```

```
end
```

```
end
```

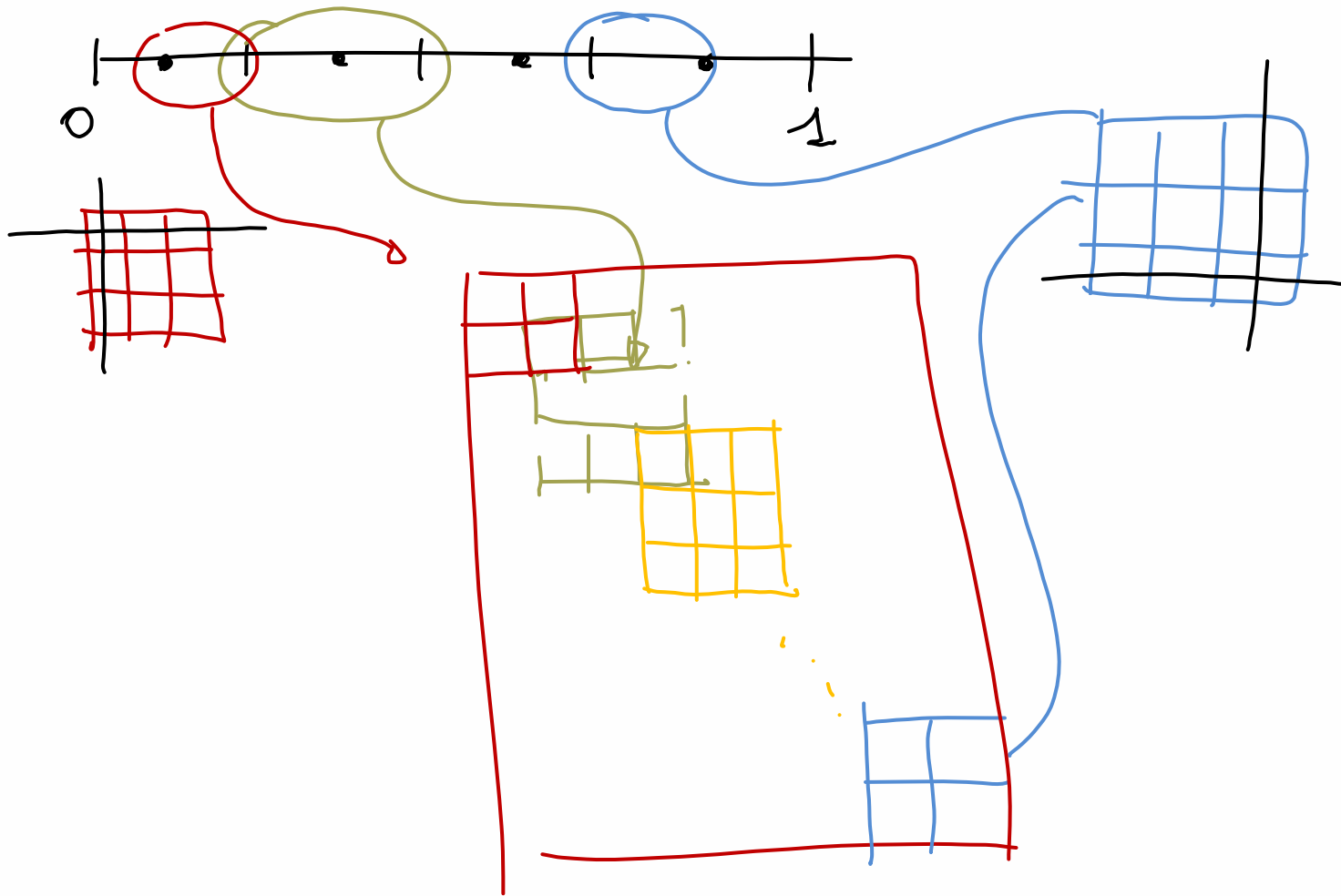
```
%solucion sistema de ecuaciones
```

```
u1 = A \ b;
```

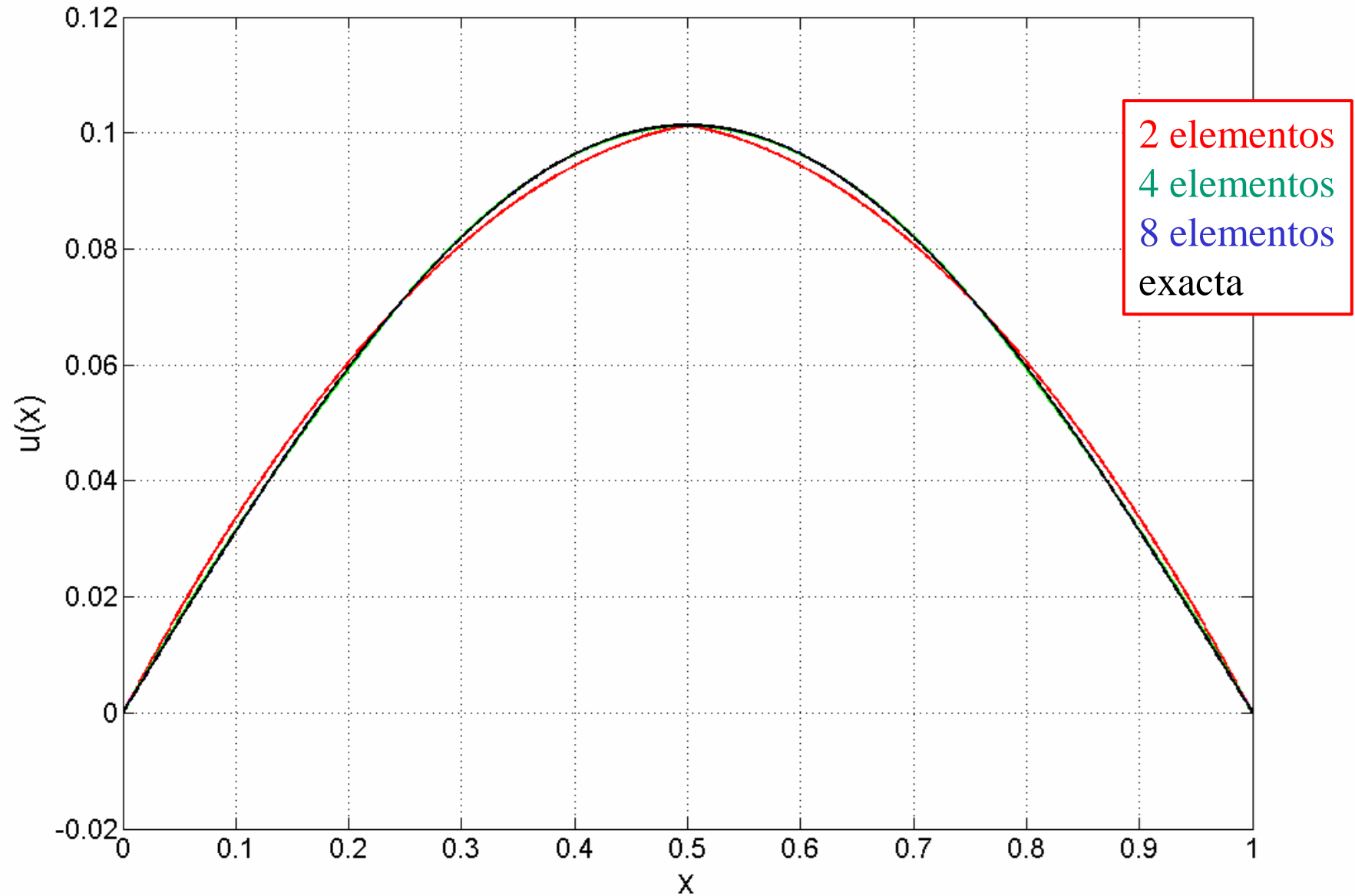
```
u = [0;u1;0];
```

```
%Energia de deformacion
```

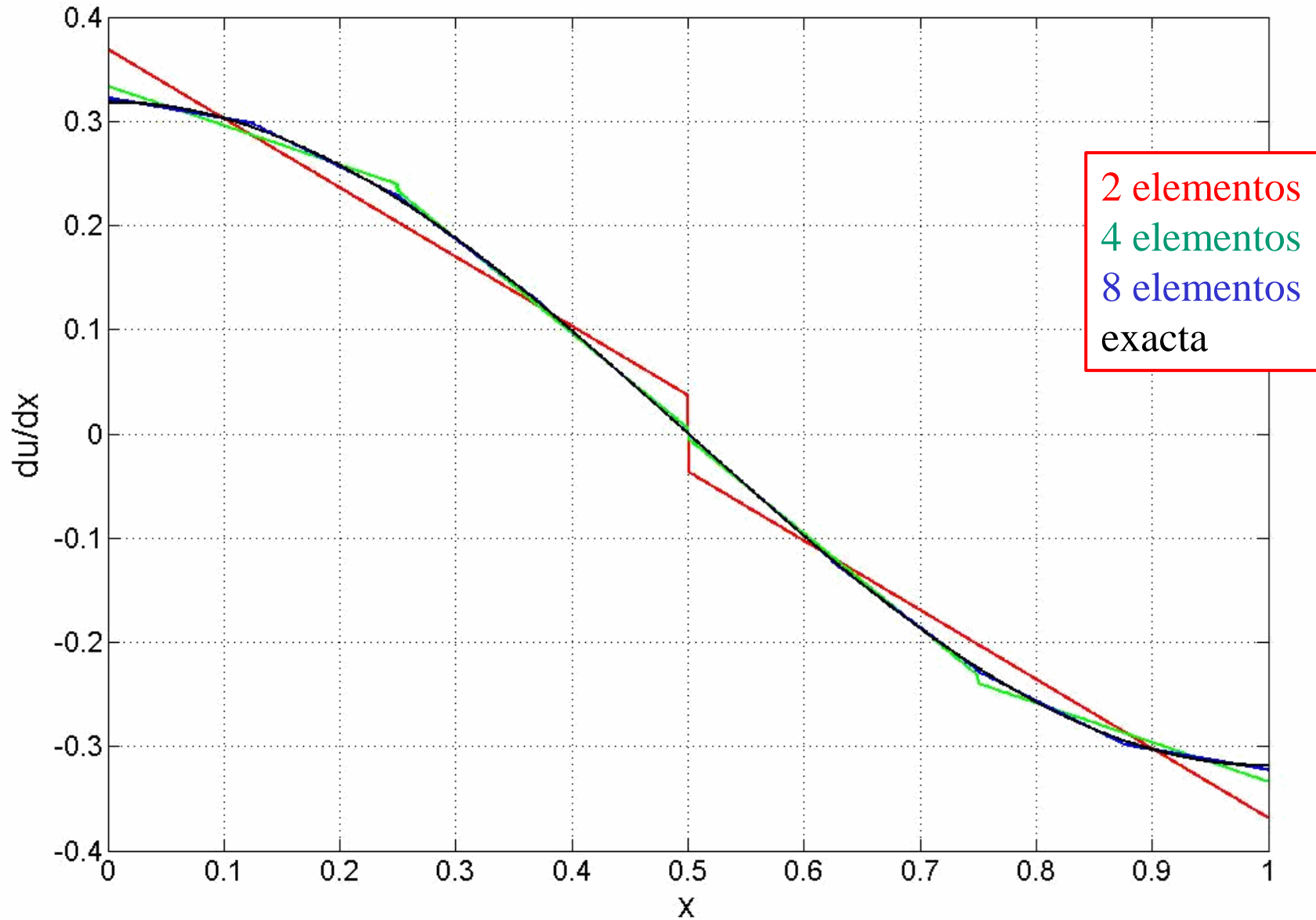
```
Udef = u1'*b;
```



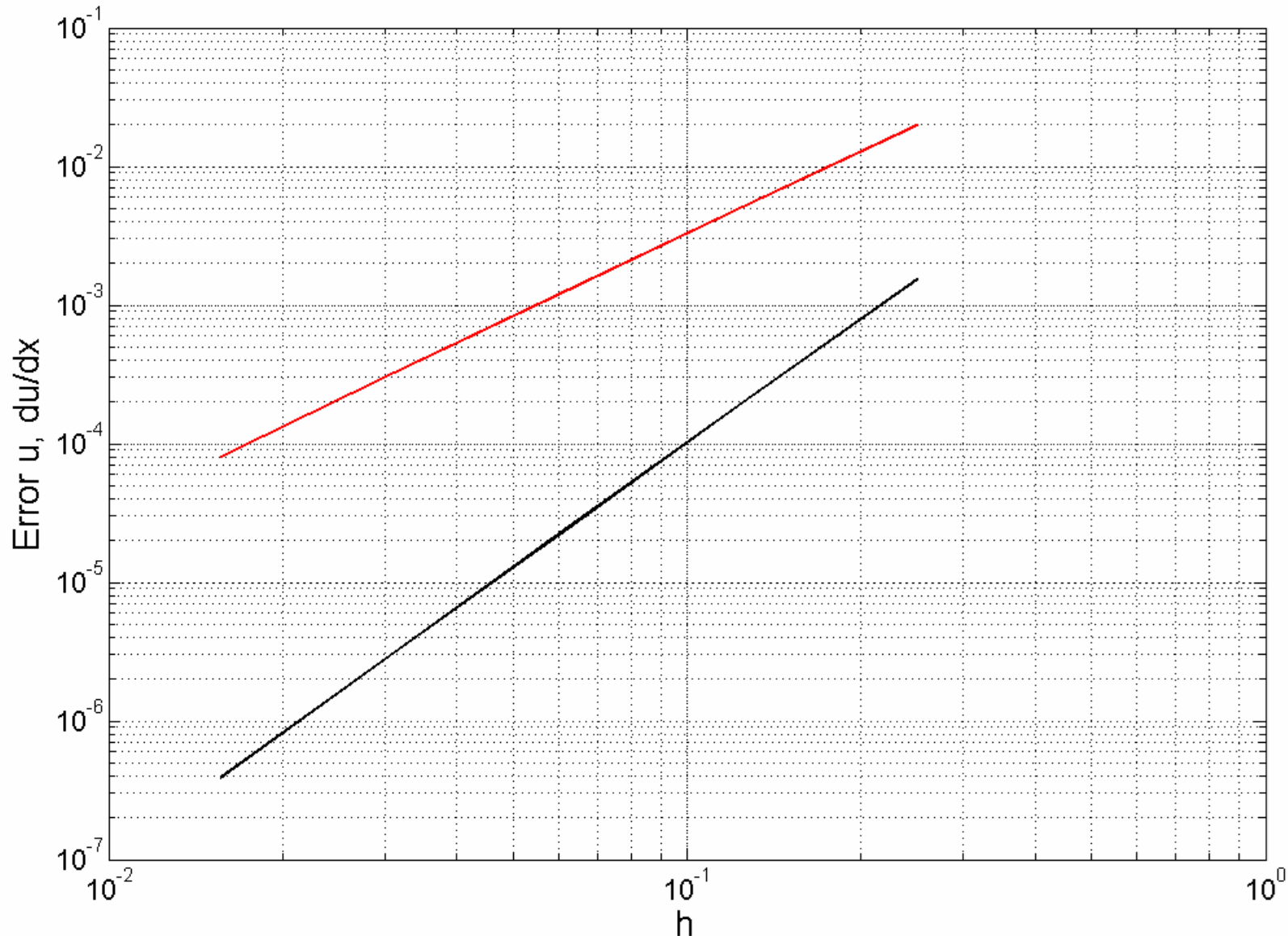
## Ejemplo: aproximación a la solución



## Ejemplo: aproximación a la derivada



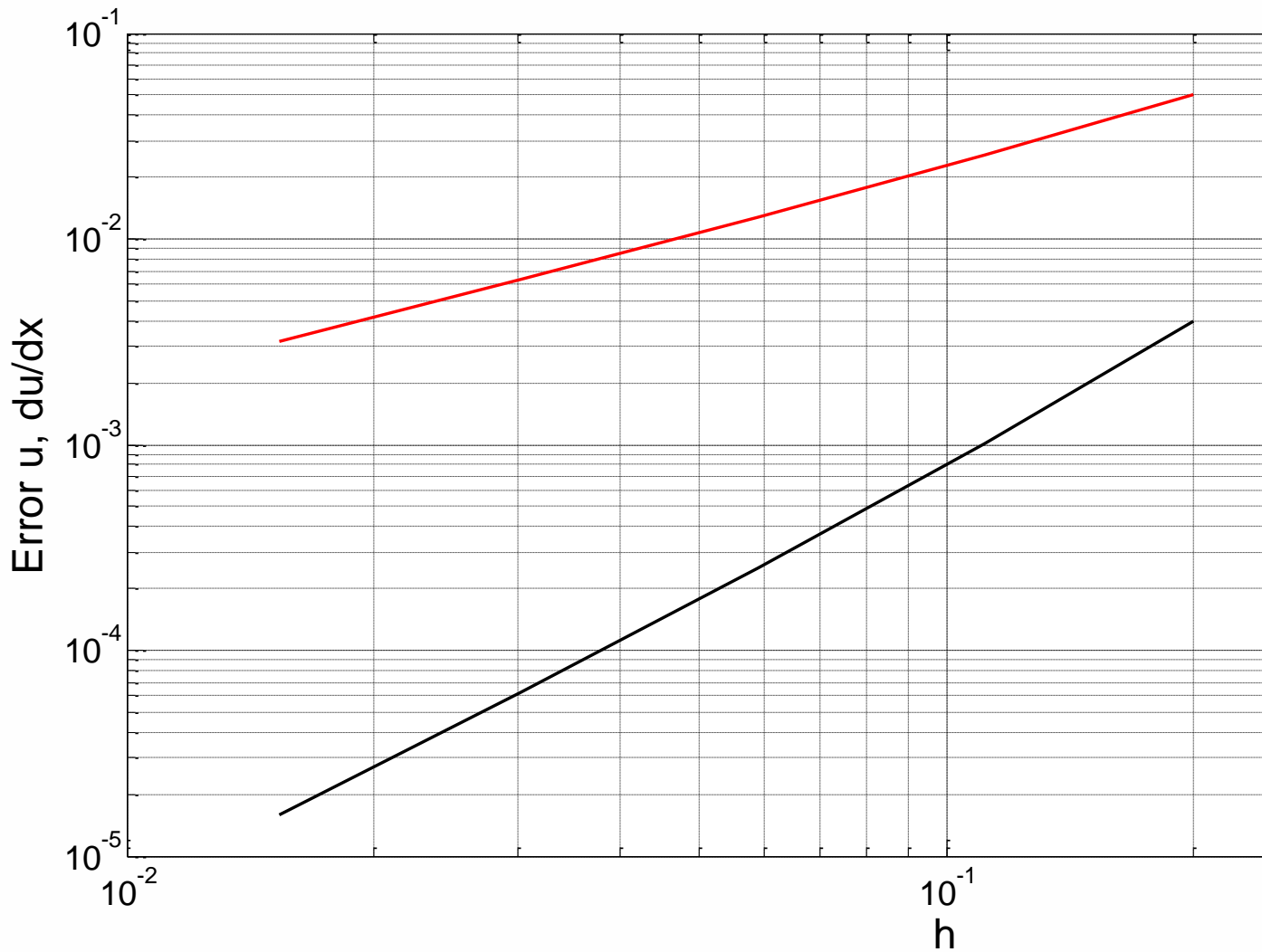
## Ejemplo: tasa de convergencia



Derivada:  
convergencia  
cuadrática

Función:  
convergencia  
cúbica

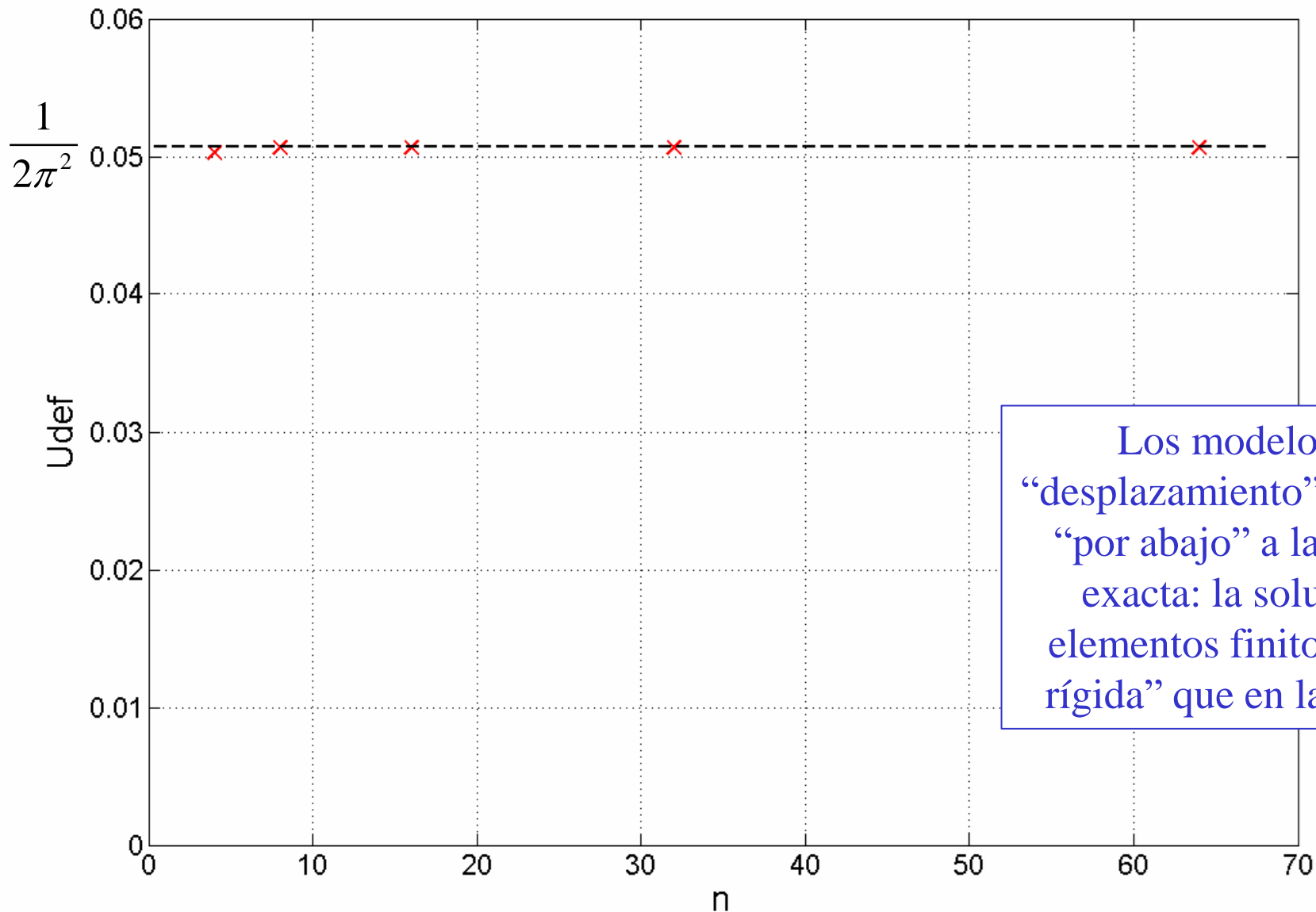
## Ejemplo: tasa de convergencia elementos lineales



Derivada:  
convergencia  
lineal

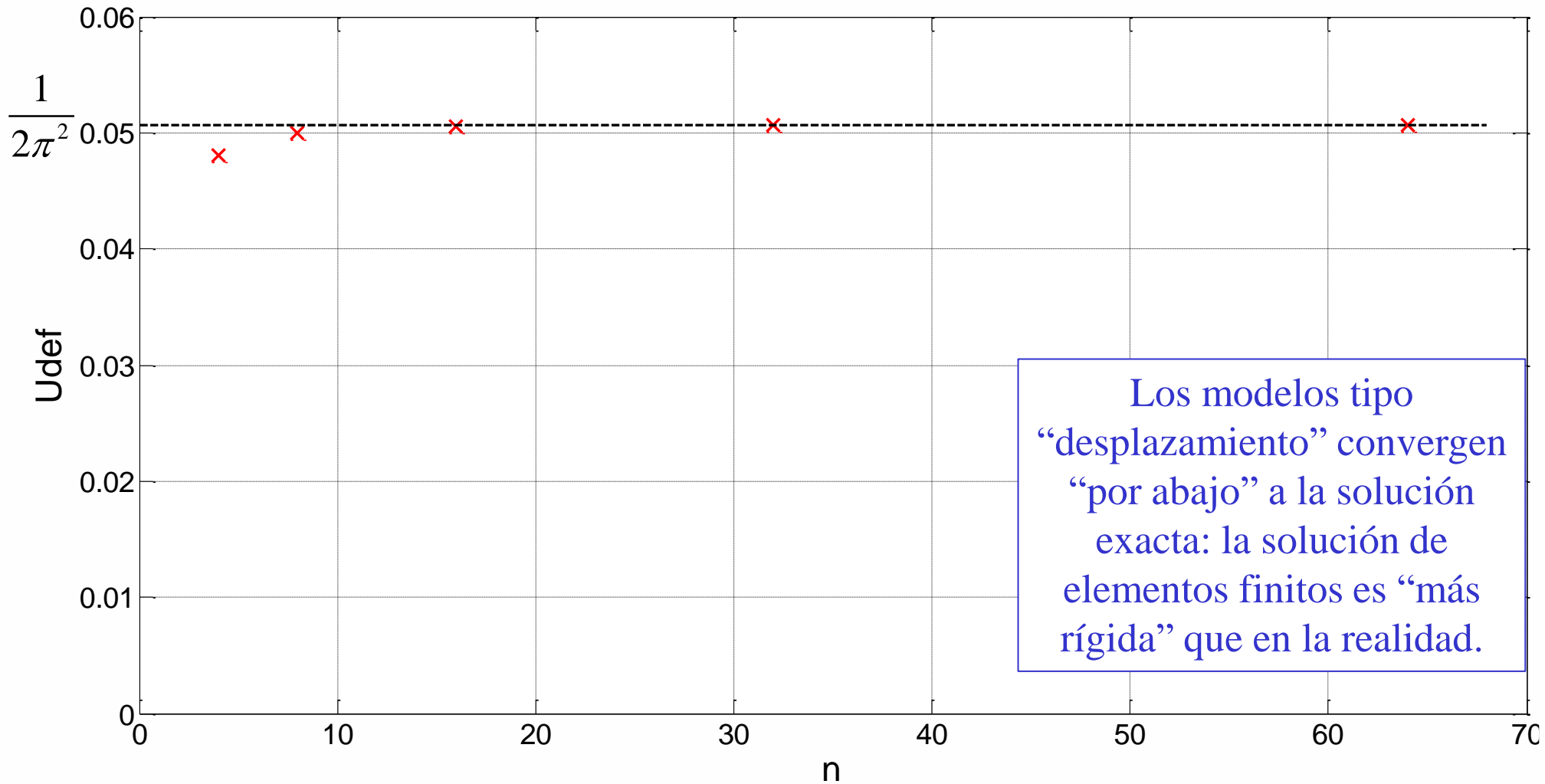
Función:  
convergencia  
cuadrática

## Ejemplo: convergencia en energía de deformación



Los modelos tipo “desplazamiento” convergen “por abajo” a la solución exacta: la solución de elementos finitos es “más rígida” que en la realidad.

## Ejemplo: convergencia en energía (elementos lineales)

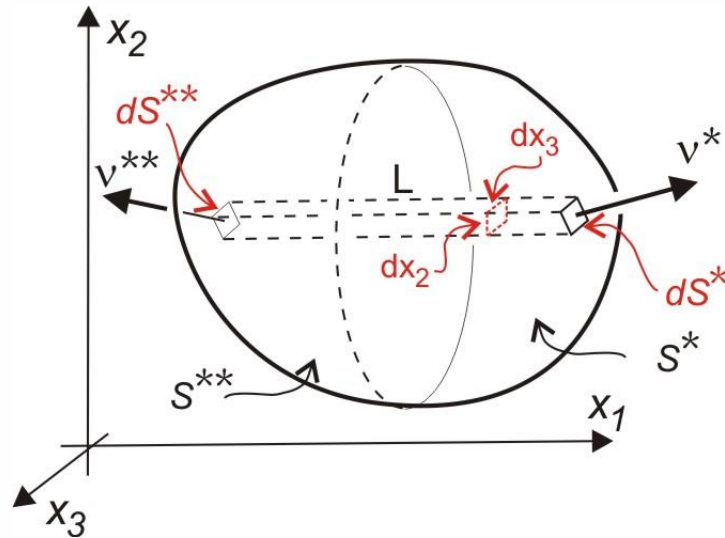


Los modelos tipo “desplazamiento” convergen “por abajo” a la solución exacta: la solución de elementos finitos es “más rígida” que en la realidad.



# Teorema de Gauss

Sea una región  $V$  convexa encerrada por una superficie  $S$



$$S^* \cap S^{**} = \{\phi\}$$

$$S^* \cup S^{**} = S$$

La superficie  $S$  puede dividirse en un número finito de partes con normales externas formando un campo continuo ( $V$  región regular).

Sea la función diferenciable  $c$ /continuidad en  $V$

$$A(x_1, x_2, x_3): V \rightarrow \mathbb{R}$$

Calcularemos:

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

## Teorema de Gauss

Integramos a lo largo de  $L$  con respecto a  $x_1$  :

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_S (A^* - A^{**}) dx_2 dx_3 = \\ &= \iint_{S^*} A^* dx_2 dx_3 - \iint_{S^{**}} A^{**} dx_2 dx_3 = (1) \end{aligned}$$

Notar:

+  $dx_2 dx_3$       proyecciones sobre el plano  $x_2 x_3$  de las áreas  
 -  $dx_2 dx_3$        $dS^*$ ,  $dS^{**}$  en los extremos de la porción  $L$

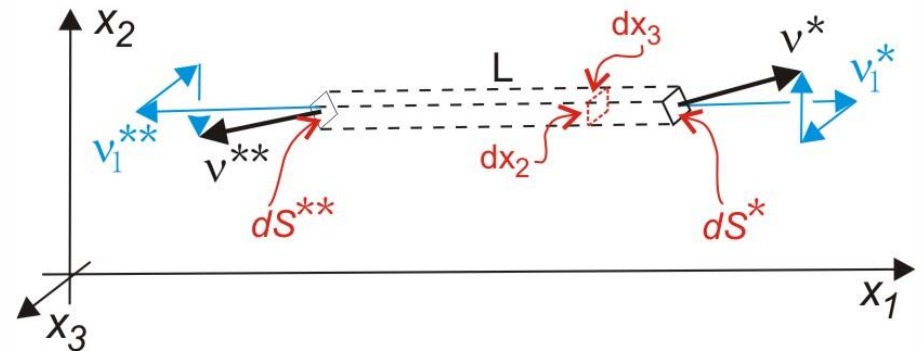
$$v_1^* = \cos(x_1, \mathbf{v}^*)$$

$$v_1^{**} = \cos(x_1, \mathbf{v}^{**}) = -\cos(-x_1, \mathbf{v}^{**})$$

$$+ dx_2 dx_3 = v_1^* dS^*$$

$$- dx_2 dx_3 = v_1^{**} dS^{**}$$

$$(1) = \iint_{S^*} A^* v_1^* dS^* + \iint_{S^{**}} A^{**} v_1^{**} dS^{**}$$



$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dV = \iint_S A v_1 dS}$$

## Teorema de Gauss

Repitiendo el razonamiento para las otras direcciones:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S \nu_i A dS \quad i = 1, 2, 3$$

Si consideramos ahora un campo tensorial

$$A_{jkl\dots}(x_1, x_2, x_3): V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\dots} dV = \int_S \nu_i A_{jkl\dots} dS \quad i = 1, 2, 3$$

$$\int_V A_{jkl\dots,i} dV = \int_S \nu_i A_{jkl\dots} dS \quad i = 1, 2, 3$$

También llamado teorema de Green o de Ostrogradski

## Formas alternativas del teorema de Gauss

1. Haciendo :

$$A = w_i$$

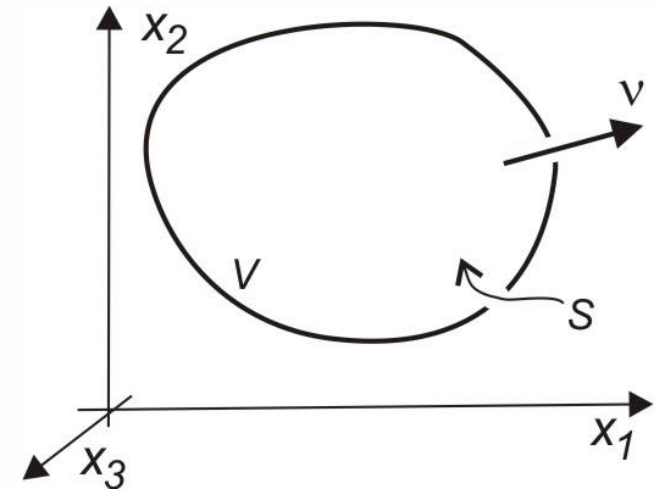
$$\int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dV = \int_S v_i w_i dS$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dS$$

2. Haciendo :

$$A = \phi$$

$$\int_V \operatorname{grad} \phi dV = \int_V \nabla \phi dV = \int_S \mathbf{v} \phi dS$$



3. Consideramos

$$e_{ijk} u_{k,j} = (\operatorname{rot} \mathbf{u})_i$$

$$\int_V e_{ijk} u_{k,j} dV = e_{ijk} \int_V u_{k,j} dV = e_{ijk} \int_S v_j u_k dS = \int_S e_{ijk} v_j u_k dS$$

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{v} \times \mathbf{u} dS$$

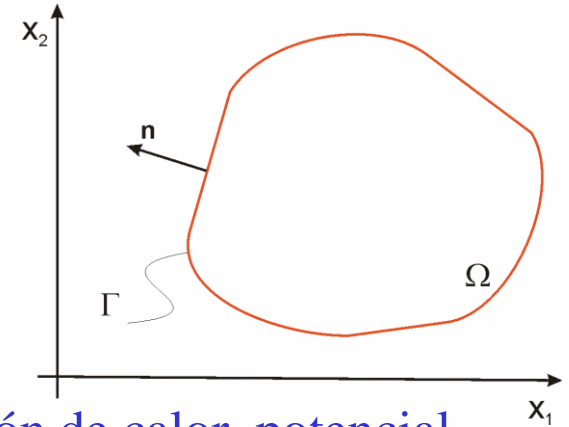
## (1.4) MEF para la ecuación de Poisson

Sea el problema:

$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

con

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$



Puede corresponder a muchos problemas físicos: conducción de calor, potencial electromagnético, desplazamiento de una membrana fija en la frontera, etc.

Teorema de la divergencia:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

con:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \quad \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix}$$

Fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} v (\nabla w \cdot \mathbf{n}) \, ds - \int_{\Omega} v \Delta w \, d\mathbf{x}$$

(En teo. divergencia, hacer  $\mathbf{A} = v \nabla w$ )

## Formulación variacional

1. Si  $u$  satisface (D), luego es solución de:

$$\boxed{\text{(V)} \quad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V}$$

con

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \quad (\text{forma bilineal}) \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}$$

$$V = \left\{ v : \begin{array}{l} \text{(i) } v \text{ es continua en } \Omega ; \\ \text{(ii) } \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ continuas a trozos en } \Omega ; \\ \text{(iii) } v = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{array} \right\}$$

D) Multiplicamos (D) por una  $v \in V$  arbitraria e integramos

$$(f, v) = - \int_{\Omega} v \Delta u \, d\mathbf{x} = - \underbrace{\int_{\Gamma} v (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \, ds}_{=0 \text{ (} v=0 \text{ en } \Gamma)} + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}}_{a(u, v)} = a(u, v) \quad \blacksquare$$

2. Como en el caso 1-D, si  $u$  suficientemente regular :

$$\boxed{\text{(D)} \Leftrightarrow \text{(V)} \Leftrightarrow \text{(M)}}$$

con

$$\boxed{\text{(M)} \quad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V}$$

Energía potencial total:

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)$$

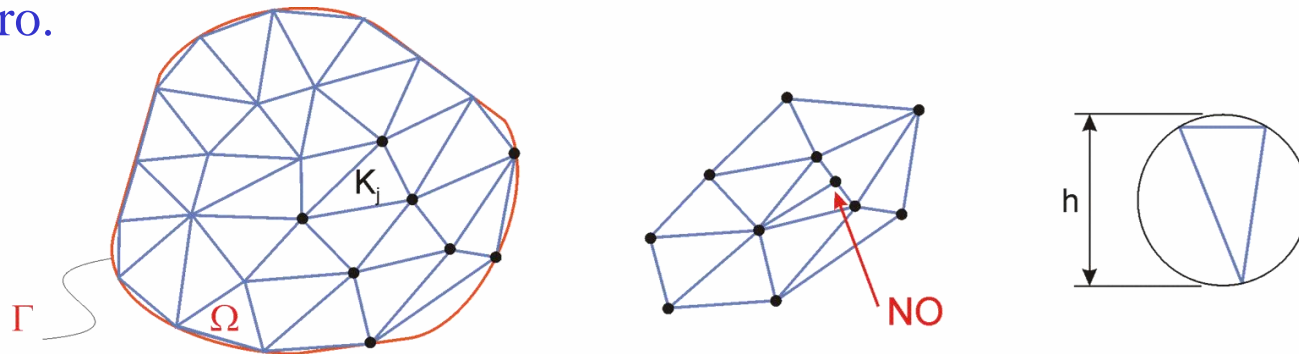
## Subespacio de funciones lineales por tramos

1. Construiremos un subespacio de dimensión finita  $V_h \subset V$  consistente en funciones lineales p/tramos.
2. Asumimos  $\Gamma$  poligonal. Sea una triangulación de  $\Omega: T_h = K_1, K_2, \dots, K_m$  con triángulos no superpuestos  $K_i$  /

$$\Omega = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m = \bigcup_{K \in T_h} K$$

$$\bigcap_{K \in T_h} K = \{\emptyset\}$$

y de forma que no haya ningún vértice de algún triángulo ubicado sobre el lado de otro.



El parámetro de malla  $h = \max_{K \in T_h} \text{diam}(K)$  mide la densidad de triangulación.

## Subespacio de funciones lineales por tramos (cont)

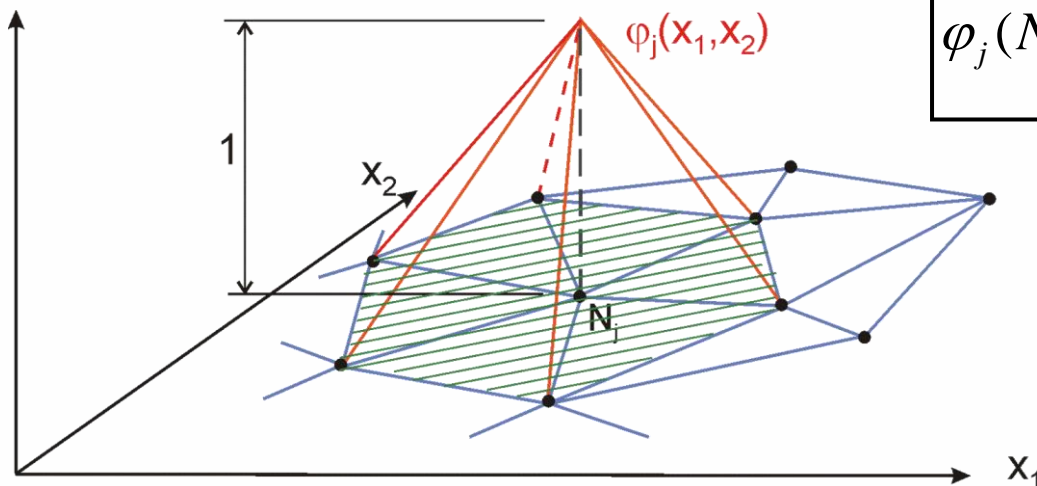
### 3. Definimos

$$V_h = \left\{ v : \begin{array}{l} \text{(i) } v \text{ es continua en } \Omega ; \\ \text{(ii) } v|_K \text{ es lineal para } K \in T_h ; \\ \text{(iii) } v = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{array} \right\}$$

Notar  $V_h \subset V$

4. Parámetros p/def.  $v \in V_h$  : valores  $v(N_i)$  de  $v$  en los nodos  $N_i$   $i = 1, \dots, M$  de  $T_h$   
Excluimos los nodos de frontera pues  $v = 0$  sobre  $\Gamma$ .

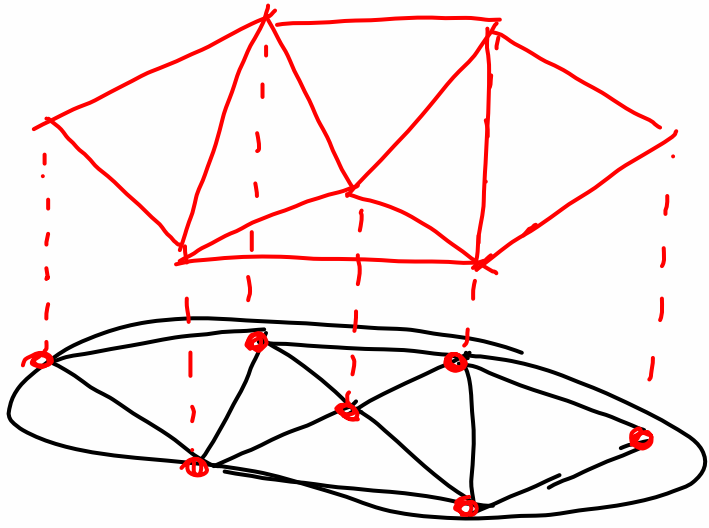
5. Def. funciones de base :  $\varphi_j(\mathbf{x}) \in V_h$  /



$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, M$$

Soporte de  $\varphi_j(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \in K \text{ con nodo } N_j \}$





## Subespacio de funciones lineales por tramos (cont)

6. Toda función  $v \in V_h$  tiene luego la representación:

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad , \quad \eta_i = v(N_i)$$

7. Formulamos luego el siguiente MEF p/el problema de Poisson (D):

$$(V_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \quad / \quad a(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

8. De manera similar al caso 1-D, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$$

$$\text{donde ahora: } a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} \quad b_i = (f, \varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\mathbf{x}$$

$$\xi_i = u_h(N_i)$$

9. Nuevamente  $\mathbf{A}$  es simétrica, definida positiva y no singular, con lo cual el sistema de ecuaciones tiene solución única. Además,  $\mathbf{A}$  es rala pues:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } N_i, N_j \notin \text{ al mismo triángulo}$$

## Noción de *mejor aproximación*

1.  $u_h \in V_h$  es la mejor aproximación a la solución  $u$  en el sentido:

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \leq \|\nabla u - \nabla v\| \quad \forall v \in V_h$$

con  $\|v\| \square a(v, v)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$

2. En particular, si encontramos  $\tilde{u}_h \in V_h$  tal que

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \leq \|\nabla u - \nabla \tilde{u}_h\|$$

podremos probar convergencia. Ejemplo, usando el interpolante

$$\tilde{u}_h(N_j) = u(N_j) \quad j = 1, \dots, M$$

tendremos:  $\|\nabla u - \nabla \tilde{u}_h\| \leq Ch$  con  $C > 0$  cte independiente de  $h$ , que depende de:

- tamaño derivadas segundas de  $u$
- menor ángulo de los triángulos  $K \in T_h$

3. Puede mostrarse luego:

$$\|u - u_h\| \leq \left( \int_{\Omega} (u - u_h)^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq Ch^2$$

4. Así, si  $u$  es *sufic. regular*, el error y su gradiente tienden a cero con  $h \rightarrow 0$

## Cálculo matriz rigidez

1. Los elementos  $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$  son calculadas por suma de contribuciones de los distintos triángulos:

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in T_h} a_K(\varphi_i, \varphi_j)$$

Notar que

$$a_K(\varphi_i, \varphi_j) \neq 0 \quad \text{sólo si } N_i, N_j \in K$$

2. Sean  $N_i, N_j$  y  $N_k$  los nodos del triángulo  $K$ . Luego, la matriz de rigidez del elemento  $K$ :

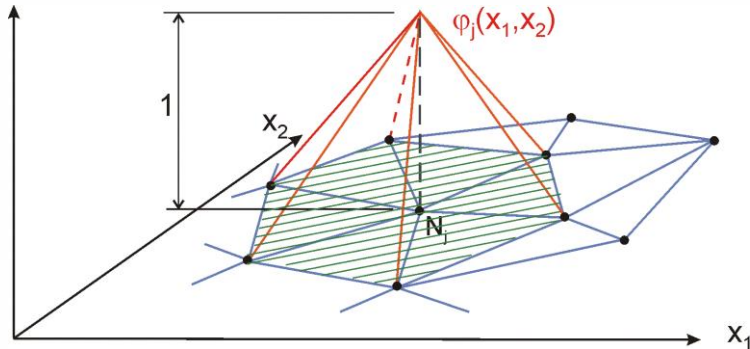
$$\mathbf{A}_K \square \begin{bmatrix} a_K(\varphi_i, \varphi_i) & a_K(\varphi_i, \varphi_j) & a_K(\varphi_i, \varphi_k) \\ & a_K(\varphi_j, \varphi_j) & a_K(\varphi_j, \varphi_k) \\ \text{sim.} & & a_K(\varphi_k, \varphi_k) \end{bmatrix}$$

3. La matriz de rigidez global  $\mathbf{A}$  es armada luego en 2 etapas:
  1. Cálculo de las matrices de rigidez elementales
  2. Sumatoria de las contribuciones de cada elemento (ensamble)

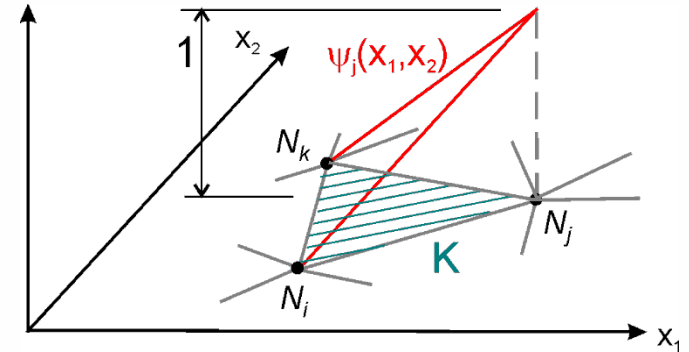
El vector de cargas  $\mathbf{b}$  es armado de la misma manera.

# Cálculo matriz rigidez elemental

1. Trabajamos con las restricciones de las funciones de base al triángulo  $K$ :



$$\psi_i \square \varphi_i|_K$$



2.  $\psi_i$  es una función lineal /

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{en el nodo } i \\ 0 & \text{en los nodos } j, k \end{cases}$$

$$\{\psi_i(x), \psi_j(x), \psi_k(x)\} \text{ base de fcs lineales en } K$$

3. Si  $w(x)$  es una función lineal en  $K$ , tiene luego la representación:

$$w(x) = w(N_i)\psi_i(x) + w(N_j)\psi_j(x) + w(N_k)\psi_k(x)$$

4. La matriz de rigidez elemental:

$$\mathbf{A}_K \triangleq \begin{bmatrix} a(\psi_i, \psi_i) & a(\psi_i, \psi_j) & a(\psi_i, \psi_k) \\ & a(\psi_j, \psi_j) & a(\psi_j, \psi_k) \\ \text{sim.} & & a(\psi_k, \psi_k) \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

$$\psi_i(x, y) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y$$

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \quad / \quad \begin{cases} \psi_i(x_i, y_i) = 1 \\ \psi_i(x_j, y_j) = 0 \\ \psi_i(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\alpha_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta} \quad \Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (\text{área triángulo})$$

$$\beta_i = \frac{y_j - y_k}{2\Delta} \quad ; \quad \gamma_i = \frac{x_k - x_j}{2\Delta}$$

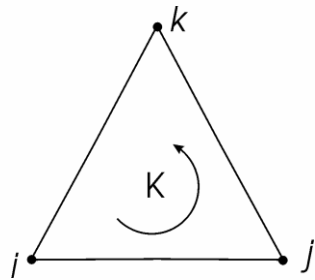
Luego:

$$a(\psi_i, \psi_i) = \int_K \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_i \, d\mathbf{x} = \int_K \begin{Bmatrix} \partial \psi_i / \partial x \\ \partial \psi_i / \partial y \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial \psi_i / \partial x \\ \partial \psi_i / \partial y \end{Bmatrix} d\mathbf{x} = \int_K \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} d\mathbf{x} = (\beta_i^2 + \gamma_i^2) \Delta$$

$$a(\psi_i, \psi_j) = \int_K \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{x} = (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) \Delta$$

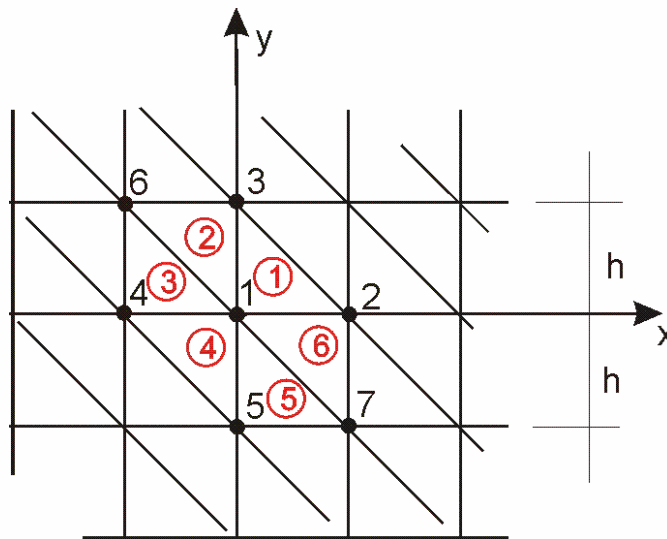
# Ejemplo

Matriz de rigidez elemental:



$$\mathbf{A}_K \triangleq \Delta \begin{bmatrix} (\beta_i^2 + \gamma_i^2) & (\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j) & (\beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k) \\ & (\beta_j^2 + \gamma_j^2) & (\beta_j\beta_k + \gamma_j\gamma_k) \\ \text{sim.} & & (\beta_k^2 + \gamma_k^2) \end{bmatrix}$$

Ilustraremos el proceso de ensamble para el caso siguiente:



Elemento 1)  $i=1; j=2; k=3$

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= 1 & \alpha_2^1 &= 0 & \alpha_3^1 &= 0 \\ \beta_1^1 &= -\frac{1}{h} & \beta_2^1 &= \frac{1}{h} & \beta_3^1 &= 0 \\ \gamma_1^1 &= -\frac{1}{h} & \gamma_2^1 &= 0 & \gamma_3^1 &= \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

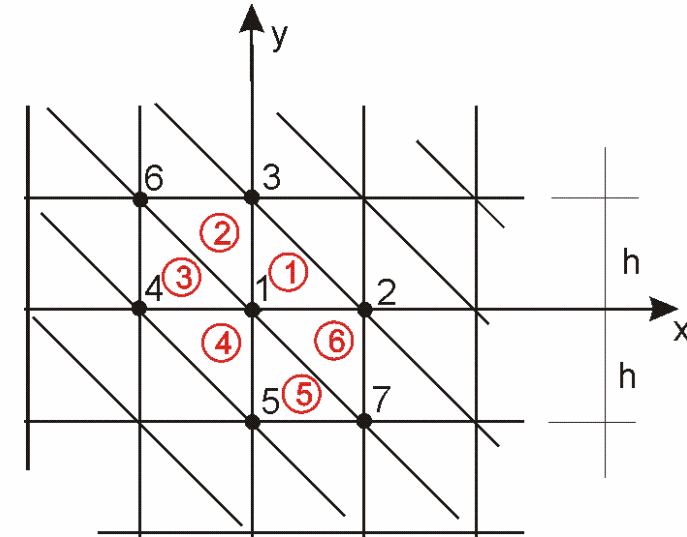
$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

## Ejemplo

Por similitud:

$$\mathbf{A}_3 \boldsymbol{\xi}^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_4 \\ \xi_1 \\ \xi_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5 \boldsymbol{\xi}^5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_5 \\ \xi_7 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$



Elemento 2)  $i=3; j=6; k=1$

$$\alpha_3^2 = 1 \quad \alpha_6^2 = 0 \quad \alpha_1^2 = 0$$

$$\beta_3^2 = \frac{1}{h} \quad \beta_6^2 = -\frac{1}{h} \quad \beta_1^2 = 0$$

$$\gamma_3^2 = \frac{1}{h} \quad \gamma_6^2 = 0 \quad \gamma_1^2 = -\frac{1}{h}$$

Luego:

$$\mathbf{A}_2 \boldsymbol{\xi}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \xi_6 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 \boldsymbol{\xi}^4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6 \boldsymbol{\xi}^6 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$



## Ensamble primer elemento

$$\mathbf{A}_1 \xi^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 1 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

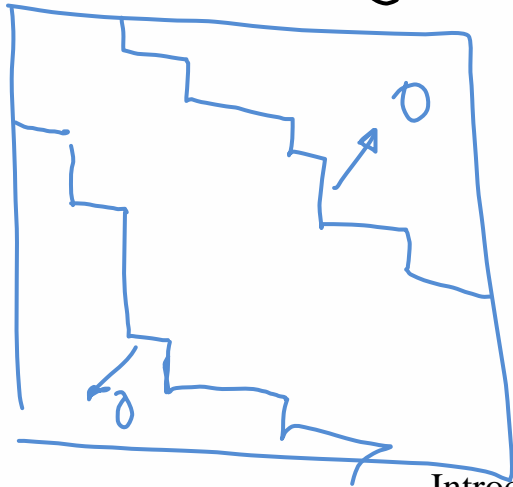
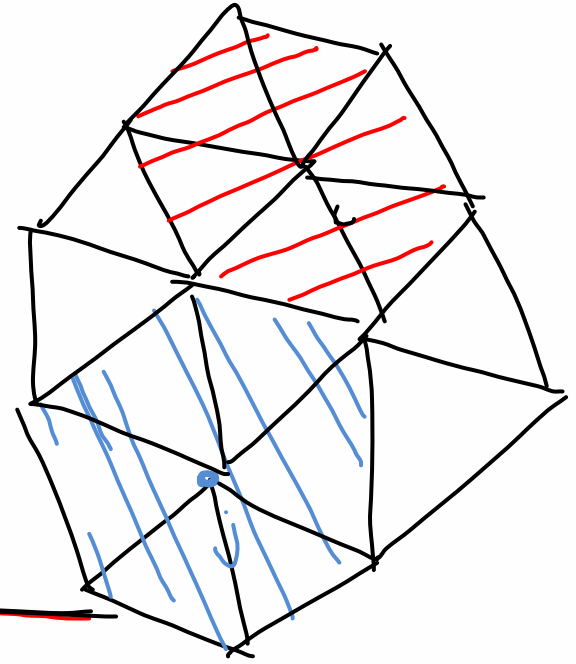
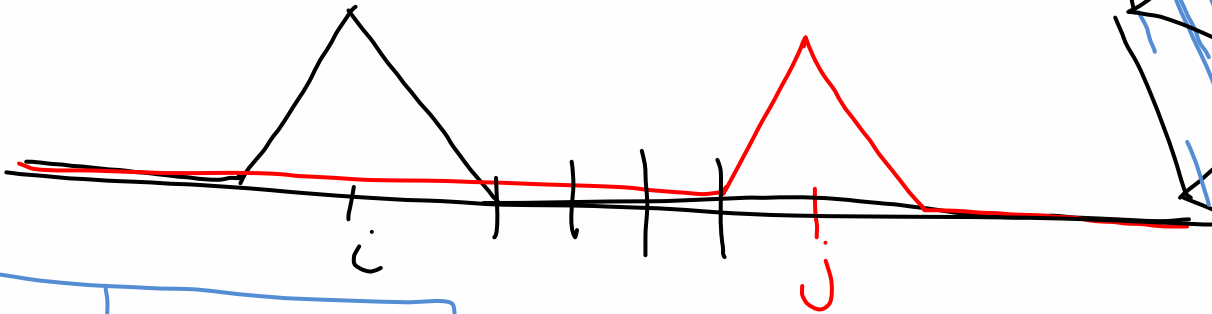
## Ensamble segundo elemento

$$\mathbf{A}_2 \boldsymbol{\xi}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \xi_6 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2+1 & -1 & -1-1 & & & & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & & & & \\ \hline -1-1 & 0 & 1+2 & & & & -1 \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline 0 & & -1 & & & & 1 \\ \hline & & & & & & \end{array} \right) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

$$\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega = \begin{cases} \neq 0 & \Leftrightarrow |i-j| > 1 \end{cases} \quad \text{Sup } \varphi_i$$



## Ensamble tercer elemento

$$\mathbf{A}_3 \boldsymbol{\xi}^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_4 \\ \xi_1 \\ \xi_6 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A}^\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+1+1 & -1 & -1-1 & -1 & & 0+0 & \\ -1 & 1 & 0 & & & & \\ -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ -1 & & & 2 & & -1 & \\ & & & & & & \\ 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Ensamble cuarto elemento

$$\mathbf{A}_4 \xi^4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+1+1+2 & -1 & -1-1 & -1-1 & -1 & 0+0 & & \\ -1 & 1 & 0 & & & & & \\ -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & & \\ -1-1 & & & 2+1 & 0 & -1 & & \\ -1 & & & 0 & 1 & & & \\ 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Ensamble quinto elemento

$$\mathbf{A}_5 \xi^5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_5 \\ \xi_7 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+1+1+2+1 & -1 & -1-1 & -1-1 & -1-1 & 0+0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & & & \\ -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ -1-1 & & & 2+1 & 0 & -1 & \\ -1-1 & & & 0 & 1+2 & & -1 \\ 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & \\ 0 & & & & -1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Ensamble sexto elemento

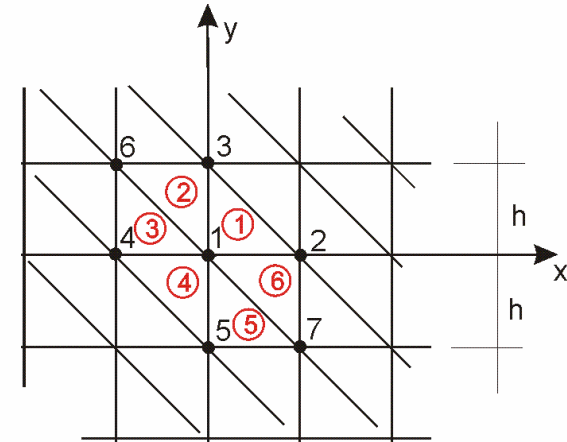
$$\mathbf{A}_6 \boldsymbol{\xi}^6 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+1+1+2+1+1 & -1-1 & -1-1 & -1-1 & -1-1 & 0+0 & 0+0 \\ -1-1 & 1+2 & 0 & & & & -1 \\ -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ -1-1 & & & 2+1 & 0 & -1 & \\ -1-1 & & & 0 & 1+2 & & -1 \\ 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & \\ 0+0 & -1 & & & -1 & & 1+1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

## Sistema de ecuaciones global

$$\mathbf{A}_\xi = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & -0.5 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$



Notar que la ecuación 1 está completa (no hay más elementos que contribuyan allí) :

$$4\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 = b_1$$

Puede mostrarse, de manera similar

$$b_1 = \frac{h^2}{6} (f^1 + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + f^6) \quad \text{con:} \quad f^i = \int_i \psi_1^i f \, dx$$

La ecuación es idéntica a la que se obtiene por diferencias finitas. El término a derecha cambia.



## Ejemplo

Sea la ecuación:

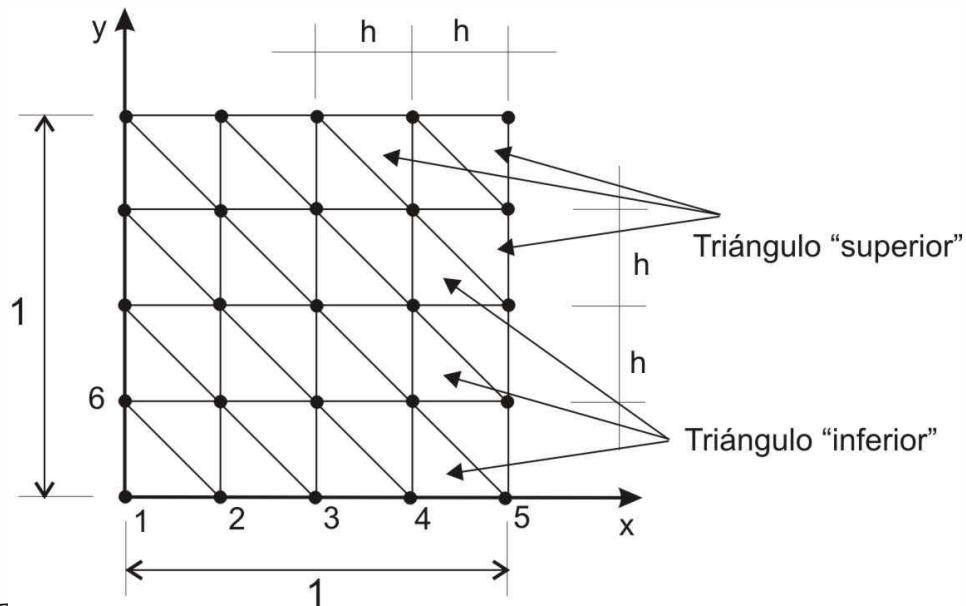
$$-\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2} = 2x(x-1) + 2y(y-1) \quad 0 < x, y < 1$$

$$u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0$$

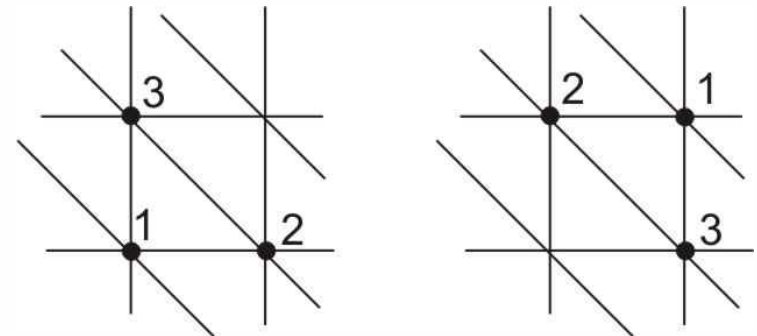
Solución exacta:

$$u(x, y) = x(x-1)y(y-1)$$

Malla de  $2n^2$  elementos  
finitos lineales

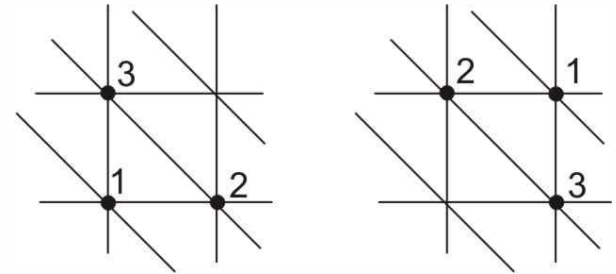


Numeración local elementos  
inferior y superior



Vector de cargas elemental:

$x_0, y_0$ : coord. nodo 1



1) Triángulo “inferior”:

$$\mathbf{b}^K = \begin{Bmatrix} b_1^K \\ b_2^K \\ b_3^K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\square} \psi_1(x, y) 2(x(x-1) + y(y-1)) d\Omega \\ \int_{\square} \psi_2(x, y) 2(x(x-1) + y(y-1)) d\Omega \\ \int_{\square} \psi_3(x, y) 2(x(x-1) + y(y-1)) d\Omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left( \frac{x_0(x_0-1) + y_0(y_0-1)}{3h^2} + \frac{x_0 + y_0 - 1}{6h} + \frac{1}{15} \right) h^4 \\ -\left( \frac{x_0(x_0-1) + y_0(y_0-1)}{3h^2} + \frac{4x_0 + 2y_0 - 3}{12h} + \frac{2}{15} \right) h^4 \\ -\left( \frac{x_0(x_0-1) + y_0(y_0-1)}{3h^2} + \frac{2x_0 + 4y_0 - 3}{12h} + \frac{2}{15} \right) h^4 \end{Bmatrix}$$

2) Triángulo “superior”:

$$\mathbf{b}^K = \begin{Bmatrix} b_1^K \\ b_2^K \\ b_3^K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\square} \psi_1(x, y) 2(x(x-1) + y(y-1)) d\Omega \\ \int_{\square} \psi_2(x, y) 2(x(x-1) + y(y-1)) d\Omega \\ \int_{\square} \psi_3(x, y) 2(x(x-1) + y(y-1)) d\Omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left( \frac{x_0(x_0-1) + y_0(y_0-1)}{3h^2} - \frac{x_0 + y_0 - 1}{6h} + \frac{1}{15} \right) h^4 \\ -\left( \frac{x_0(x_0-1) + y_0(y_0-1)}{3h^2} - \frac{4x_0 + 2y_0 - 3}{12h} + \frac{2}{15} \right) h^4 \\ -\left( \frac{x_0(x_0-1) + y_0(y_0-1)}{3h^2} - \frac{2x_0 + 4y_0 - 3}{12h} + \frac{2}{15} \right) h^4 \end{Bmatrix}$$

# Programa para calculo integrales término de derecha

```

clear
syms x y x0 y0 real
syms h n positive

% h --> tamaño de los elementos (1/n)
% n --> cantidad de elementos por lado del cuadrado
% f = - 2*x*(x - 1) - 2*y*(y - 1);

h = 1/n;
f = - 2*x*(x - 1) - 2*y*(y - 1);

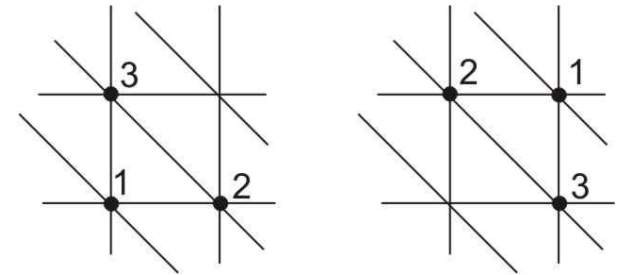
% 1) Calcula int (phi_i * f) dA para el elemento
%   triangular "inferior" :
%
% (x0,y0) --> coordenadas nodo 1
%
phi1 = 1 -(x-x0)/h -(y-y0)/h;
phi2 = (x-x0)/h;
phi3 = (y-y0)/h;

f1x = int(phi1*f,x);
f1xint = simplify(subs(f1x,x,x0+y0+h-y) - subs(f1x,x,x0));
f1y = int(f1xint,y);
f1inf = simplify(subs(f1y,y,y0+h) - subs(f1y,y,y0));

f2x = int(phi2*f,x);
f2xint = simplify(subs(f2x,x,x0+y0+h-y) - subs(f2x,x,x0));
f2y = int(f2xint,y);
f2inf = simplify(subs(f2y,y,y0+h) - subs(f2y,y,y0));

f3x = int(phi3*f,x);
f3xint = simplify(subs(f3x,x,x0+y0+h-y) - subs(f3x,x,x0));
f3y = int(f3xint,y);
f3inf = simplify(subs(f3y,y,y0+h) - subs(f3y,y,y0));

```



```

% 2) Calcula int (phi_i * f) dA para el elemento
%   triangular "superior" :
%
% (x0,y0) --> coordenadas nodo 1
%
phi1 = 1 + (x-x0)/h + (y-y0)/h;
phi2 = -(x-x0)/h;
phi3 = -(y-y0)/h;

f1x = int(phi1*f,x);
f1xint = simplify(subs(f1x,x,x0) - subs(f1x,x,x0+y0-h-y));
f1y = int(f1xint,y);
f1sup = simplify(subs(f1y,y,y0) - subs(f1y,y,y0-h));

f2x = int(phi2*f,x);
f2xint = simplify(subs(f2x,x,x0) - subs(f2x,x,x0+y0-h-y));
f2y = int(f2xint,y);
f2sup = simplify(subs(f2y,y,y0) - subs(f2y,y,y0-h));

f3x = int(phi3*f,x);
f3xint = simplify(subs(f3x,x,x0) - subs(f3x,x,x0+y0-h-y));
f3y = int(f3xint,y);
f3sup = simplify(subs(f3y,y,y0) - subs(f3y,y,y0-h));

```

# Programa Matlab / Octave para cálculo solución elementos finitos

```

function [u] = ejemplodimensional(n)
% function [u] = ejemplodimensional(n)
%
% Elementos finitos lineales
% Malla cuadrada n*n
%   n = cantidad de elementos por lado
%
%       14   15
% 13+-----+-----+-----+16
%   | \   | \   | \   |
%   | \   | \   | \   |
% 9 +-----+-----+-----+12
%   | \   | \   | \   |
%   | \   | \   | \   |
% 5 +-----+-----+-----+8
%   | \   | \   | \   |
%   | \   | \   | \   |
%   +-----+-----+-----+
%   1     2     3     4

% cantidad de gdl total
nn = (n+1)*(n+1);
% cantidad de elementos total
nel = 2*n*n;

% inicializacion de matriz de rigidez y vector de cargas globales
A = zeros(nn,nn);
b = zeros(nn,1);

% lazo sobre los elementos
% trato primero los elementos inferiores, luego los superiores
for kx = 1:n
    for ky = 1:n
        % 1) Tratamiento elemento triangular "inferior"
        %
        % coordenadas nodo 1 del elemento k inferior
        x0 = (kx-1)*1/n;    y0 = (ky-1)*1/n;

        % matriz de rigidez elemental inferior
        Ainf = ...
            [2 -1 -1;
             -1 1 0;
             -1 0 1] / 2;

        % vector de cargas elemental inferior
        binf = [...
            -((x0^2-x0+y0^2-y0)/3*n^2 + (x0+y0-1)/6*n      + 1/15)/n^4;
            -((x0^2-x0+y0^2-y0)/3*n^2 + (4*x0+2*y0-3)/12*n + 2/15)/n^4;
            -((x0^2-x0+y0^2-y0)/3*n^2 + (2*x0+4*y0-3)/12*n + 2/15)/n^4];

        % vector de localizacion
        locel = [(ky-1)*(n+1)+kx (ky-1)*(n+1)+kx+1 (ky)*(n+1)+kx];

        % ensamble de matriz de rigidez
        for i=1:3
            for j=1:3
                A(locel(i),locel(j)) = A(locel(i),locel(j)) + Ainf(i,j);
            end
        end

        % ensamble de vector de cargas
        for i=1:3
            b(locel(i)) = b(locel(i)) + binf(i);
        end
    end
end

```

# Programa Matlab / Octave para cálculo solución elementos finitos (cont)

```
% 2) Tratamiento elemento triangular "superior"
%
% coordenadas nodo 1 del elemento superior
x0 = kx*1/n;   y0 = ky*1/n;
% matriz de rigidez elemental superior
Asup = ...
    [2 -1 -1;
     -1 1 0;
     -1 0 1]/2;
% vector de cargas elemental superior
bsup = [...
    -((x0^2-x0+y0^2-y0)/3*n^2 - (x0+y0-1)/6*n   + 1/15)/n^4;
    -((x0^2-x0+y0^2-y0)/3*n^2 - (4*x0+2*y0-3)/12*n + 2/15)/n^4;
    -((x0^2-x0+y0^2-y0)/3*n^2 - (2*x0+4*y0-3)/12*n + 2/15)/n^4];
% vector de localizacion
locel = [(ky)*(n+1)+kx+1 (ky)*(n+1)+kx (ky-1)*(n+1)+kx+1];
% ensamble de matriz de rigidez
for i=1:3
    for j=1:3
        A(locel(i),locel(j)) = A(locel(i),locel(j)) + Asup(i,j);
    end
end
% ensamble de vector de cargas
for i=1:3
    b(locel(i)) = b(locel(i)) + bsup(i);
end
end
end
```

```
% Lista de nodos fijos (nodos donde u=0)
fix = [ 1:n+1 ...
       n+2:n+1:(n+1)*(n-1)+1 ...
       2*(n+1):n+1:(n+1)*n ...
       n*(n+1)+1:(n+1)*(n+1)];
% solucion sistema de ecuaciones
%
% Modificacion sistema ecuaciones para
% introducir condiciones de borde homogeneas
b(fix) = zeros(size(fix,1));
A(:,fix) = zeros(size(A,1),length(fix));
A(fix,:) = zeros(length(fix),size(A,1));
A(fix,fix) = diag(ones(length(fix),1));
u = A \ b;
```



# Introducción de condiciones de borde homogéneas

```
b(fix) = zeros(size(fix,1));  
A(:,fix) = zeros(size(A,1),length(fix));  
A(fix,:) = zeros(length(fix),size(A,1));  
A(fix,fix) = diag(ones(length(fix),1));
```

```
u = A \ b;
```

Ej:  $\text{fix} = [3, 5]$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-u'' = f \Rightarrow (v', u') = (v, f) \quad \forall v \in V$$

$$V = \{v \text{ cont, } v' \text{ cont P/tires, } v=0 \text{ borde}\}$$

$$u_h \in V_h? / V_h = \{v \text{ cont, } v \text{ lin P/Arms, } v=0 \text{ borde}\}$$

$$(v', u_h') = (v, f) \quad \forall v \in V_h \quad v = N_J V_J$$

$\delta_{IJ}$   $\delta$  Kronecker

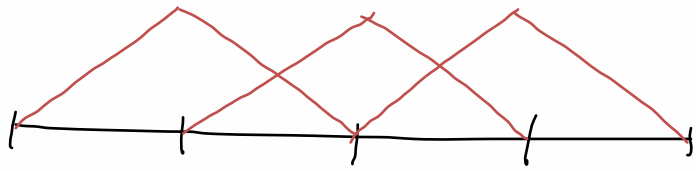
$$u_h = N_I U_I$$

$$V_J (N_J', N_I') U_I = V_J (N_J, f) \quad \forall V_J \in \mathbb{R}^N$$

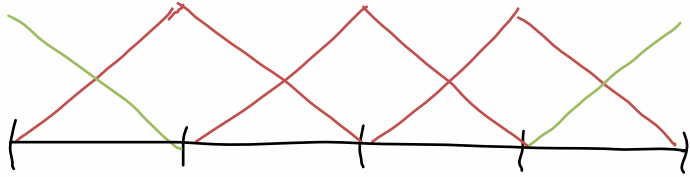
$\delta u$

$$\underbrace{(N_J', N_I')}_A U_I = \underbrace{(N_J, f)}_b$$

$$\delta V A U = \delta V b$$



CB homogénea dim 3



CB no homog dim 5

$$V = \begin{pmatrix} v_e \\ v_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_e U_e \\ N_f U_f \end{pmatrix}$$

$$v_f = 0 \Rightarrow U_f = 0$$

$$\delta V A U = \delta V b$$

$$\begin{pmatrix} \delta v_e \\ \delta v_f \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{ee} & A_{ef} \\ A_{fe} & A_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_e \\ U_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta v_e \\ \delta v_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_e \\ b_f \end{pmatrix}$$

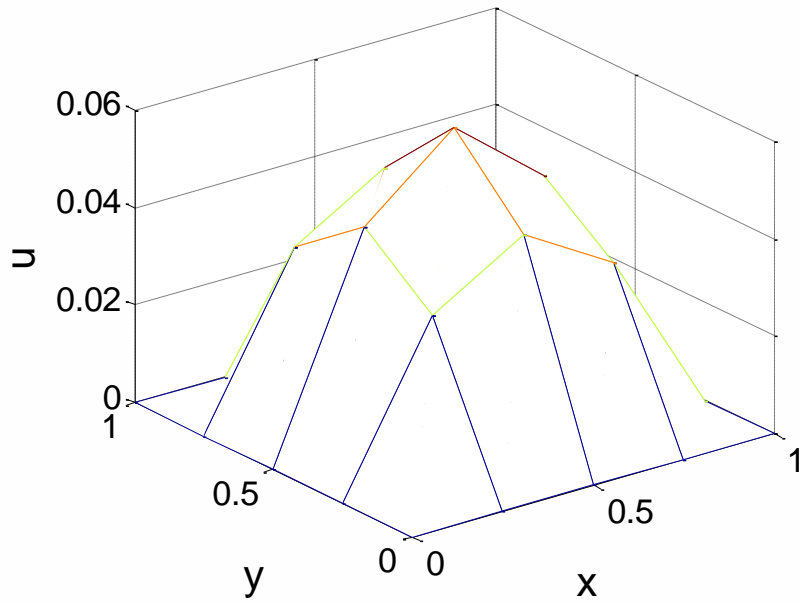
(Red circles under  $\delta v_f$ ,  $U_f$ , and  $b_f$ )

$$\delta v_e A_{ee} U_e = \delta v_e b_e$$

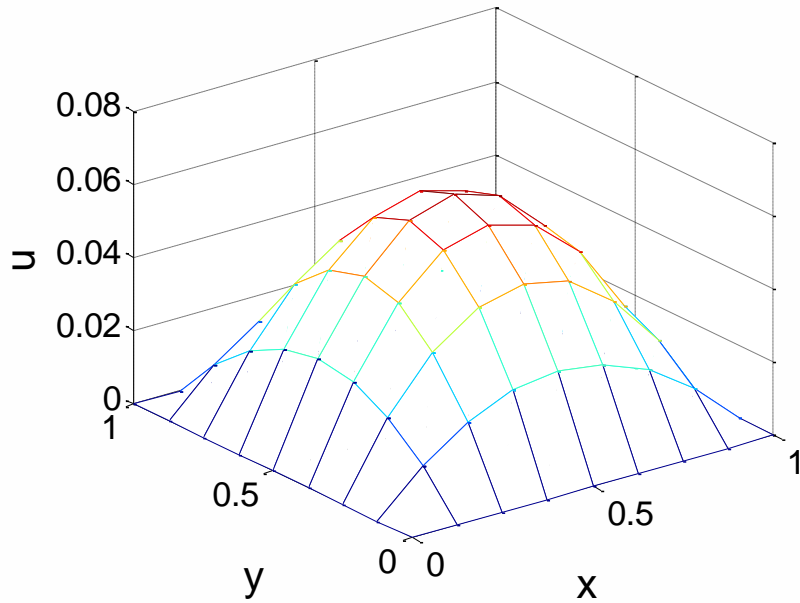
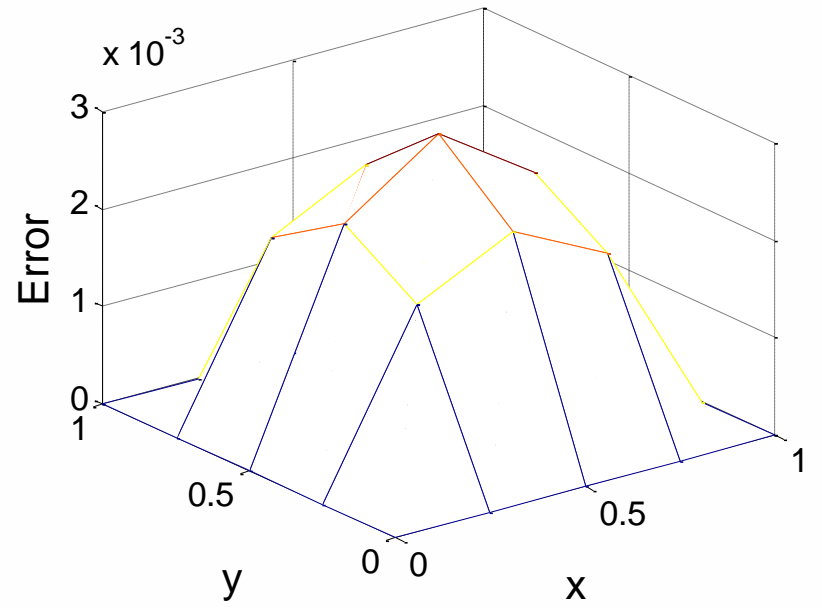

---


$$A_{ee} U_e = b_e$$

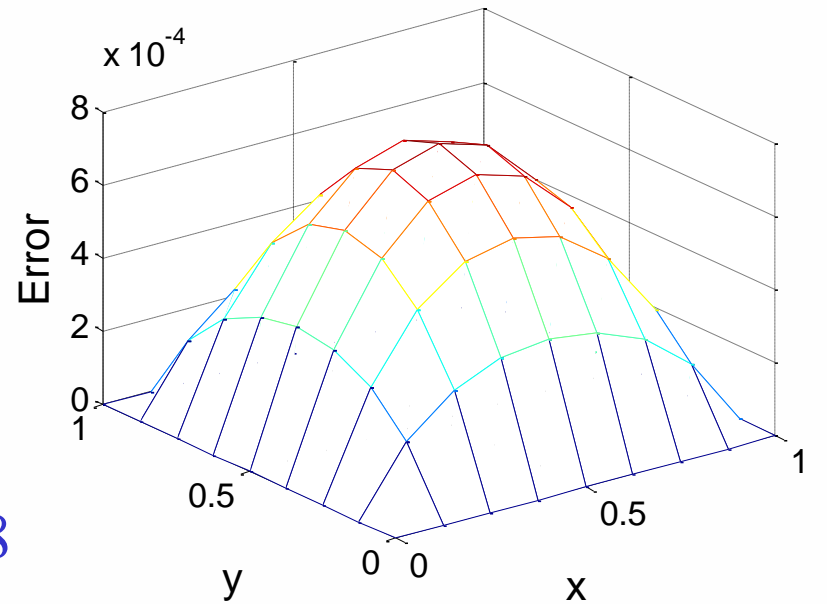


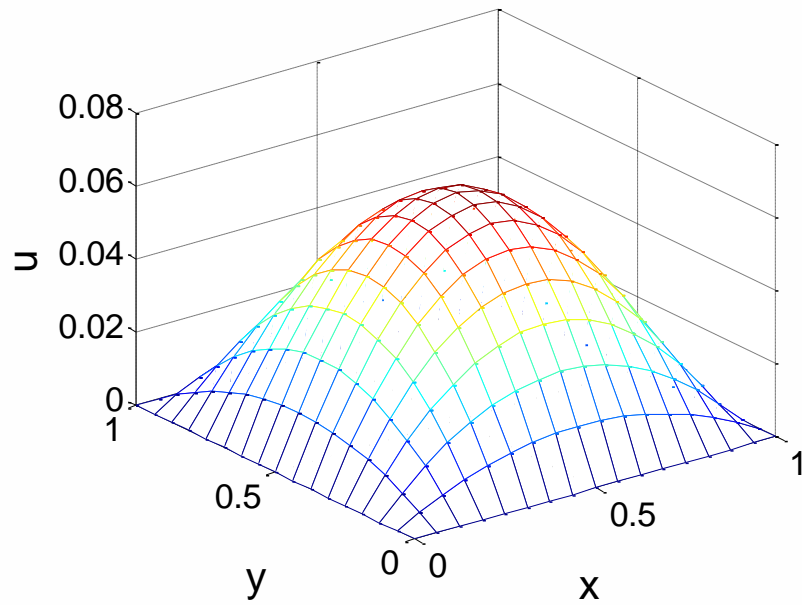


$n=4$

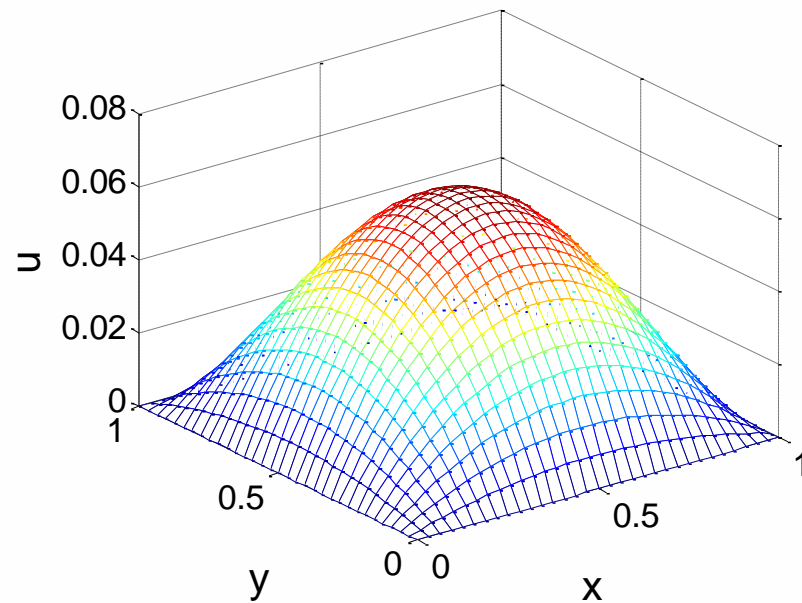
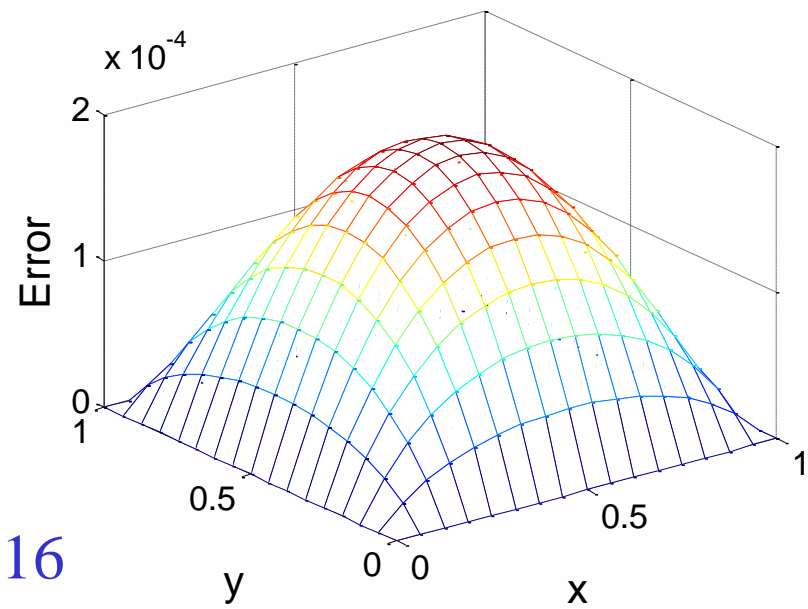


$n=8$

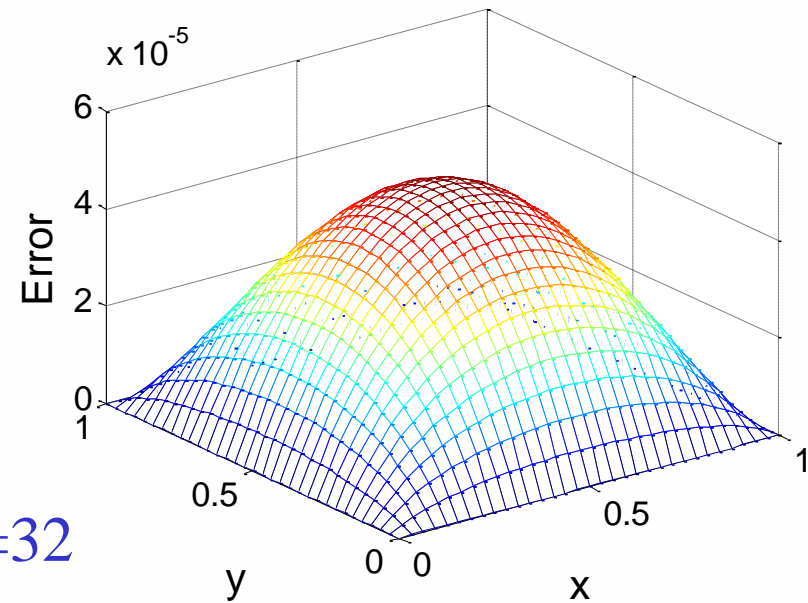


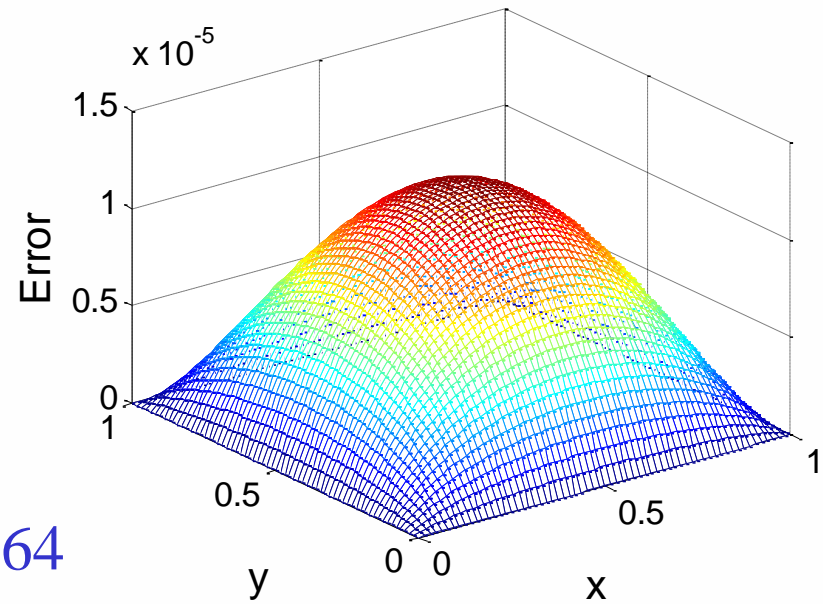
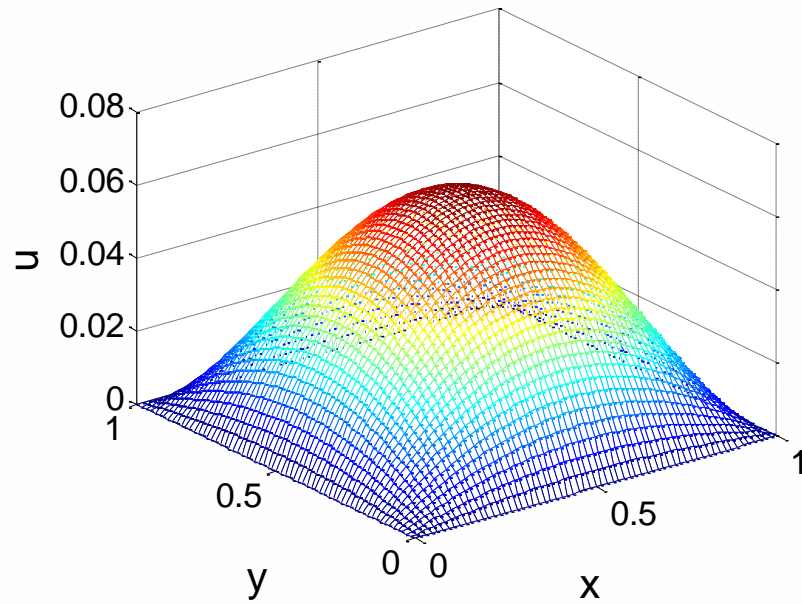


$n=16$

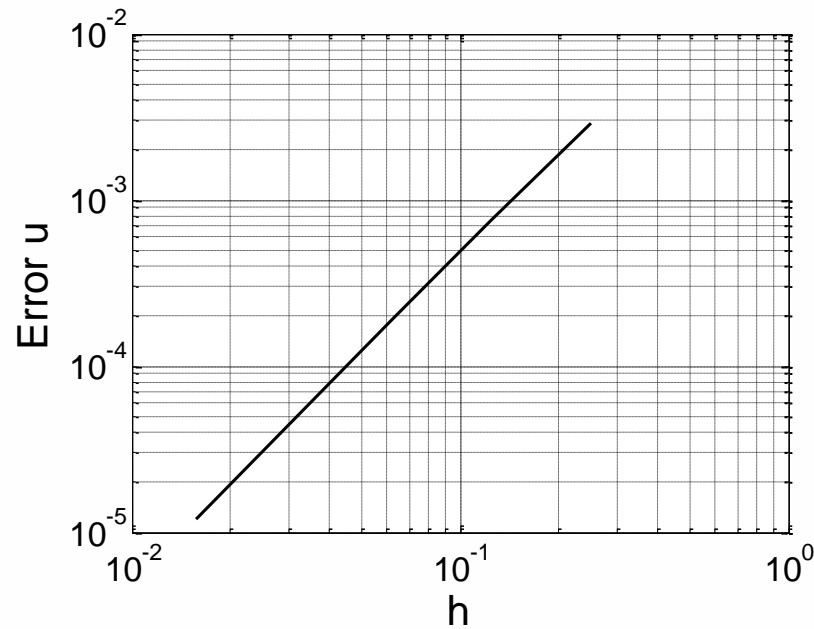


$n=32$

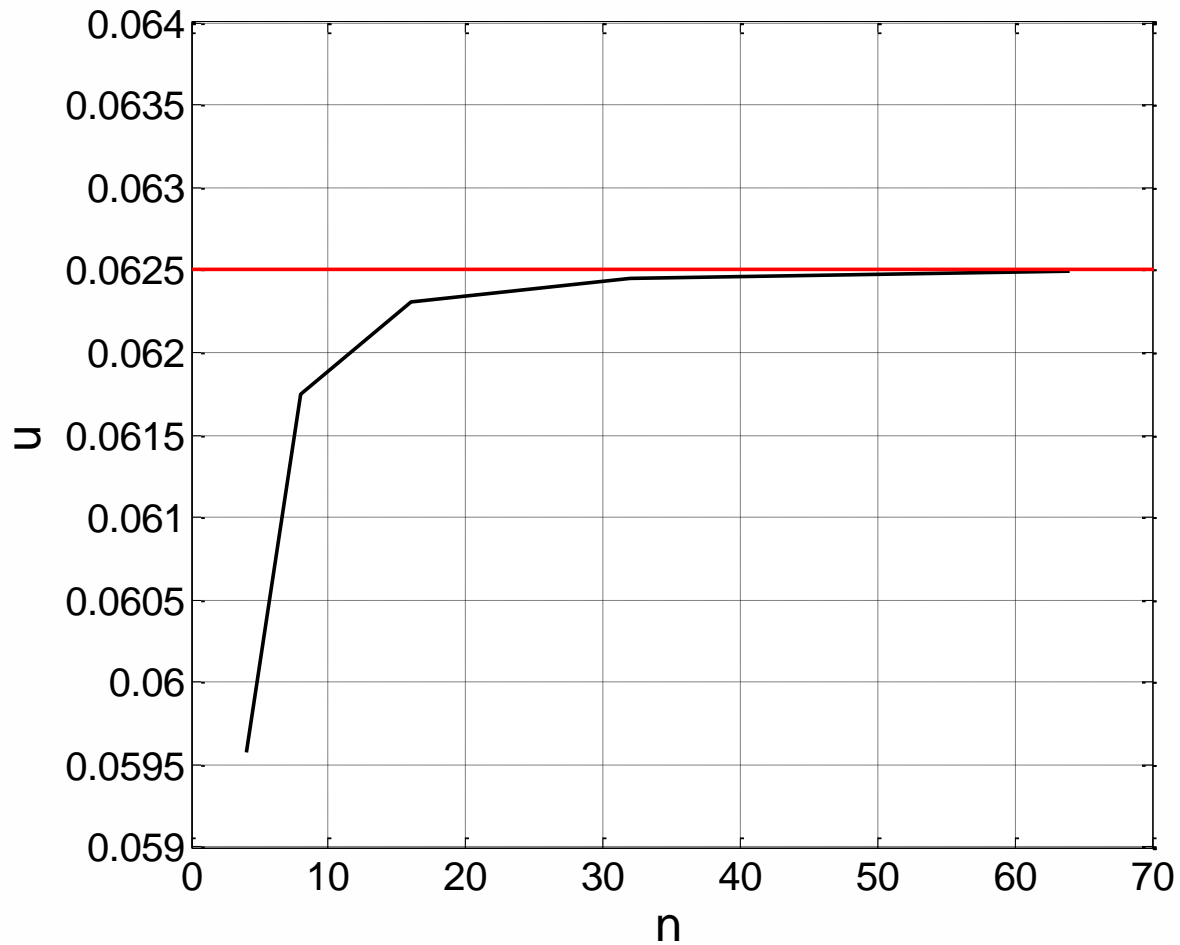




$n=64$



Convergencia cuadrática de la función incógnita a la solución exacta



Los modelos tipo  
“desplazamiento” convergen  
“por abajo” a la solución  
exacta: la solución de  
elementos finitos es “más  
rígida” que en la realidad.

## Tratamiento condiciones de borde generales (Cauchy)

Sea el problema:

$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_u \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \phi & \text{sobre } \Gamma_\phi \end{cases}$$

$f$ ,  $\bar{u}$ , y  $\phi$  funciones dato definidas sobre  $\Omega$ ,  $\Gamma_u$ , y  $\Gamma_\phi$ .

Sea el espacio de “funciones de prueba”

$$V = \left\{ v : \text{(i) } v \text{ es continua en } \Omega ; \text{(ii) } \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ continuas a trozos en } \Omega ; \text{(iii) } v = \bar{u} \text{ sobre } \Gamma_u \right\}$$

y el espacio de “funciones de peso”

$$W = \left\{ w : \text{(i) } w \text{ es continua en } \Omega ; \text{(ii) } \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \text{ continuas a trozos en } \Omega ; \text{(iii) } w = 0 \text{ sobre } \Gamma_u \right\}$$

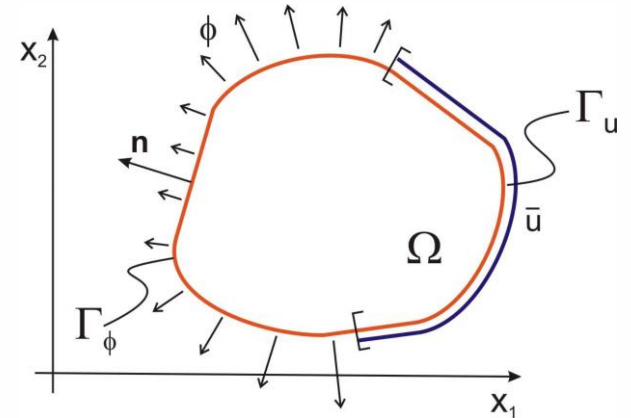
Luego, el problema (D) es equivalente al problema variacional:

$$(V) \quad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad a(u, w) = (f, w) + \langle \phi, w \rangle_{\Gamma_\phi} \quad \forall w \in W$$

$$a(u, w) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, d\mathbf{x}$$

$$(f, w) = \int_{\Omega} f w \, d\mathbf{x}$$

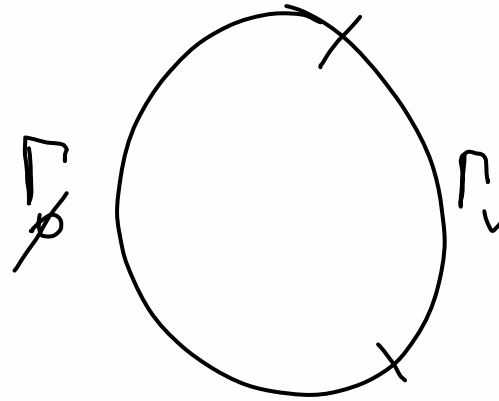
$$\langle \phi, w \rangle_{\Gamma_\phi} = \int_{\Gamma_\phi} \phi w \, d\mathbf{x}$$



$$-\Delta u = f$$

$$u = \bar{u} \quad \text{en } \Gamma_u$$

$$\nabla u \cdot n = \phi \quad \text{en } \Gamma_\phi$$



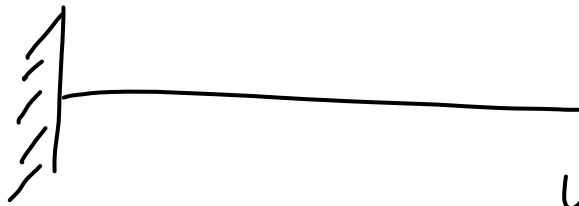
Sea  $u$  solución  $\Rightarrow u|_{\Gamma_u} = \bar{u}$

$$0 = \int_{\Omega} w (\Delta u + f) d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\Omega + \int_{\Gamma} w \nabla u \cdot n d\Gamma =$$

$$= - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\Omega + \int_{\Gamma_u} w \nabla u \cdot n d\Gamma + \int_{\Gamma_\phi} w \nabla u \cdot n d\Gamma + \int_{\Omega} w f d\Omega$$

~~$\int_{\Gamma_u} w \nabla u \cdot n d\Gamma$~~   $w|_{\Gamma_u} = 0$

$$w \in W = \{ \dots w = 0 \text{ en } \Gamma_u \}$$



$$u=0$$

$$\varphi=0$$

$$u''=0 \Rightarrow Q$$

$$u'''=0 \Rightarrow M_f$$



$$u=0$$

$$u'''=0 \Rightarrow M_f=0$$

$$\varphi=0$$

$$u''=0 \Rightarrow Q=0$$

# Método de elementos finitos (c/cond borde de Cauchy)

1. Sea una triangulación  $T_h = K_1, K_2, \dots, K_m$  de  $\Omega$ .
2. Construiremos dos subespacios de dimensión finita  $V_h \subset V$  y  $W_h \subset W$  consistentes en funciones lineales p/tramos:

$$V_h = \left\{ v : \begin{array}{l} \text{(i) } v \text{ es continua en } \Omega ; \\ \text{(ii) } v|_K \text{ es lineal para } K \in T_h ; \\ \text{(iii) } v = \bar{u} \text{ sobre } \Gamma_u \end{array} \right\}$$

$$W_h = \left\{ w : \begin{array}{l} \text{(i) } w \text{ es continua en } \Omega ; \\ \text{(ii) } w|_K \text{ es lineal para } K \in T_h ; \\ \text{(iii) } w = 0 \text{ sobre } \Gamma_u \end{array} \right\}$$

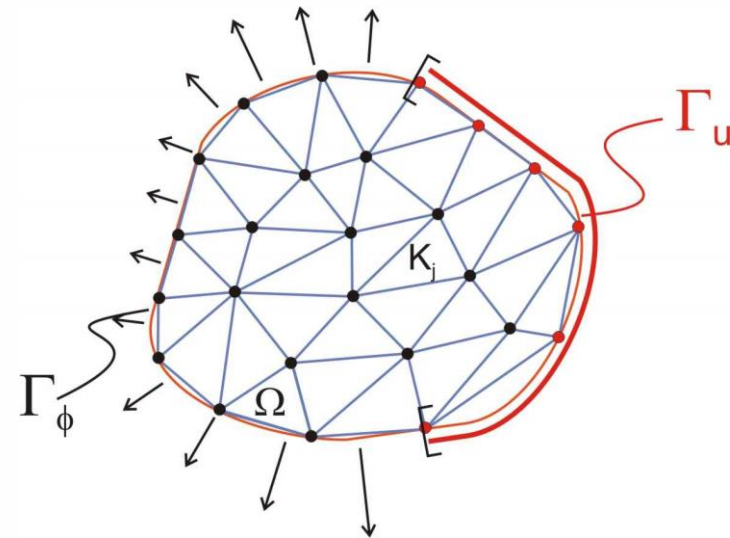
3. Sean  $i = 1, M \rightarrow$  nodos del interior de  $\Omega$  o de la frontera  $\Gamma_\phi$   
 $i = M + 1, N \rightarrow$  nodos de la frontera  $\Gamma_u$

4. Toda función  $v \in V_h$  tiene la representación

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=M+1}^N \bar{\xi}_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\eta_i = v(N_i), \quad \bar{\xi}_i = \bar{u}_h(N_i) = \bar{u}(N_i)$$

todo  $w \in W_h \Rightarrow \sum_{i=1, M} \xi_i \varphi_i(x)$





$$a(u_h, w) = (w, f) + \langle w, \phi \rangle_{\mathbb{R}^M} \quad \forall w \in W_h$$

$$u_h = \varphi_I^L \zeta_I + \varphi_I^F \bar{\zeta}_I \quad w = \varphi_I^L W_I$$

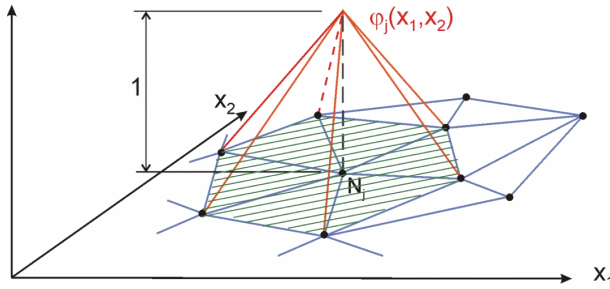
$$W_I a(\varphi_I^L, \varphi_I^L) \zeta_I + \underbrace{W_I a(\varphi_I^L, \varphi_I^F) \bar{\zeta}_I}_{\text{red bracket}} =$$

$$= W_I (\varphi_I^L, f) + W_I \langle \varphi_I^L, \phi \rangle_{\mathbb{R}^M} \quad \forall W_I \in \mathbb{R}^M$$

$$\underbrace{a(\varphi_I^L, \varphi_I^L)}_{A_{Iy}} \zeta_I = \underbrace{(\varphi_I^L, f) + \langle \varphi_I^L, \phi \rangle_{\mathbb{R}^M} - a(\varphi_I^L, \varphi_I^F) \bar{\zeta}_I}_{b_I}$$

## Método de elementos finitos (c/cond borde de Cauchy - cont)

Funciones de base :  $\varphi_j(\mathbf{x}) \in V_h$  /



$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N$$

Soporte de  $\varphi_j(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \in T_h \text{ con nodo } N_j \}$

5. Formulamos luego el siguiente MEF p/el problema (D):

$$(V_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \quad / \quad a(u_h, w) = (f, w) + \langle \phi, w \rangle_{\Gamma_\phi} \quad \forall w \in W_h$$

6. Este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A} \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{b} \quad \xi_i = u_h(N_i)$$

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} \quad i, j = 1, \dots, M$$

$$b_i = (f, \varphi_i) + \langle \phi, \varphi_i \rangle_{\Gamma_\phi} - \sum_{j=M+1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) \bar{\xi}_j = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\phi} \phi \varphi_i \, d\mathbf{x} - \sum_{j=M+1}^N \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} \bar{\xi}_j$$

$$\partial(\varphi_i, \varphi_j) \quad i, j = 1, N$$

$$1, M \Rightarrow L$$

$$M+1, N \Rightarrow F$$

$A_{LL}$	$A_{LF}$
$A_{FL}$	$A_{FF}$

$$\partial(\varphi_i, \varphi_j) \quad i, j = 1, M \Rightarrow A_{LL}$$

$$\underbrace{\partial(\varphi_i, \varphi_j)}_{A_{LF}} \quad \begin{matrix} \{ \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ F \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} l = 1, M \\ j = 1 + M, N \end{matrix}$$

## Tratamiento sistemático términos de carga

- El cálculo de las integrales para el término de derecha, depende en principio de las expresiones de  $f$  y  $\phi$
- Para sistematizar el cálculo podemos interpolar los términos de carga usando las mismas funciones de interpolación que para el campo incógnita:

donde

$$f(\mathbf{x}) \approx f_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N f_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

- los valores nodales (dato)  $f_i = f_h(N_i) = f(N_i) \quad i = 1, \dots, N$
- la sumatoria se hace sobre todos los nodos de la triangulación
- Luego, el término de carga de volumen resulta:  

$$(f, \varphi_i) = \int_{\Omega} \varphi_i f \, d\mathbf{x} \approx \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j f_j \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x} f_j = M_{ij} f_j$$

$$i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N$$
- El término de frontera  $\phi$  recibe un tratamiento similar
- Una simplificación mayor consiste en decir directamente (MatFEM):

$$(f, \varphi_i) \approx f_i \frac{\Delta}{3} = f(N_i) \frac{\Delta}{3} \quad i = 1, \dots, N; \quad \Delta = \text{área triángulo}$$

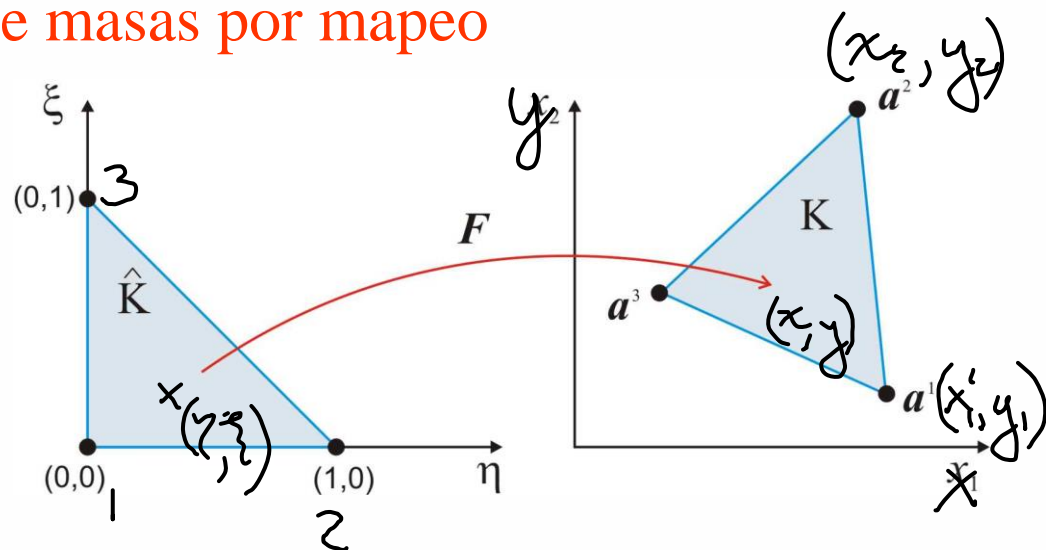
## Cálculo matriz de masas por mapeo

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{\eta}, \underline{\xi}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\psi_i(\eta, \xi) = \alpha_i + \beta_i \eta + \gamma_i \xi \rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 1 - \eta - \xi \\ \psi_2 = \eta \\ \psi_3 = \xi \end{cases}$$

$$x = \sum_{i=1}^3 x_i \psi_i(\eta, \xi) = (1 - \eta - \xi)x_1 + \eta x_2 + \xi x_3$$

$$y = \sum_{i=1}^3 y_i \psi_i(\eta, \xi) = (1 - \eta - \xi)y_1 + \eta y_2 + \xi y_3$$



$$\int_K f(x, y) d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} f(x(\eta, \xi), y(\eta, \xi)) |\mathbf{J}| d\boldsymbol{\eta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = x_2 - x_1$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = x_3 - x_1$$

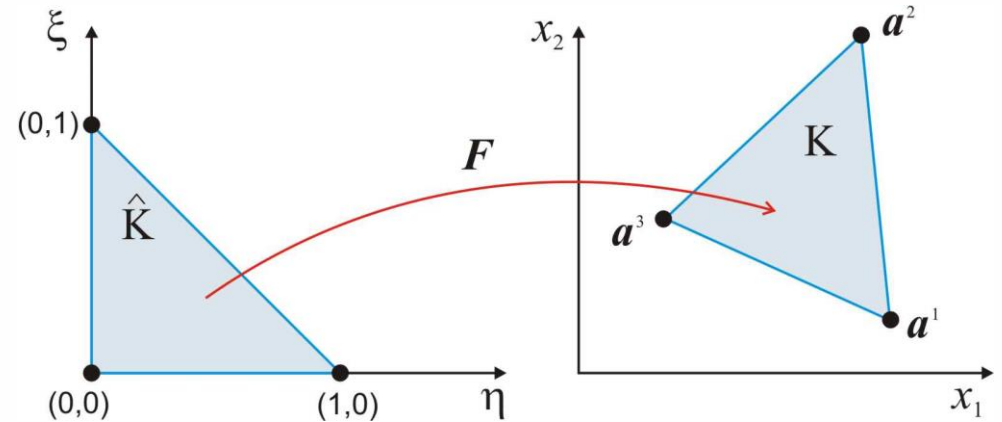
$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = y_2 - y_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = y_3 - y_1$$

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 2\Delta$$

## Cálculo matriz de masas por mapeo (cont)

$$\Psi(x(\eta, \xi), y(\eta, \xi)) = \begin{cases} 1 - \eta - \xi \\ \eta \\ \xi \end{cases}$$



$$M_{ij} = (\psi_i, \psi_j) = \int_K \psi_i(x, y) \psi_j(x, y) d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} \psi_i(\eta, \xi) \psi_j(\eta, \xi) |\mathbf{J}| d\eta$$

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\Delta \text{ \u00e1rea tri\u00e1ngulo})$$

## Ejemplo

Tratamos nuevamente  
la ecuación:

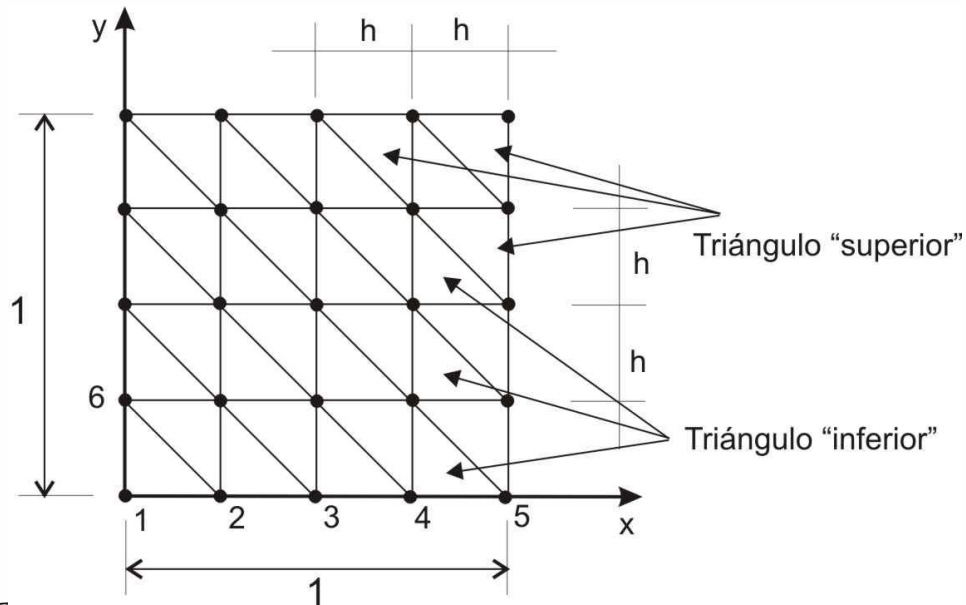
$$-\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2} = 2x(x-1) + 2y(y-1) \quad 0 < x, y < 1$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0$$

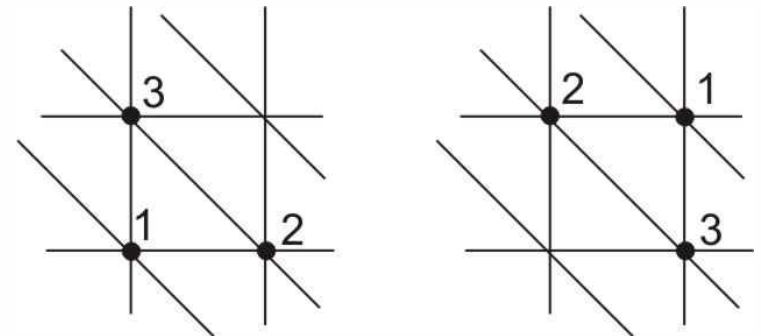
Solución exacta:

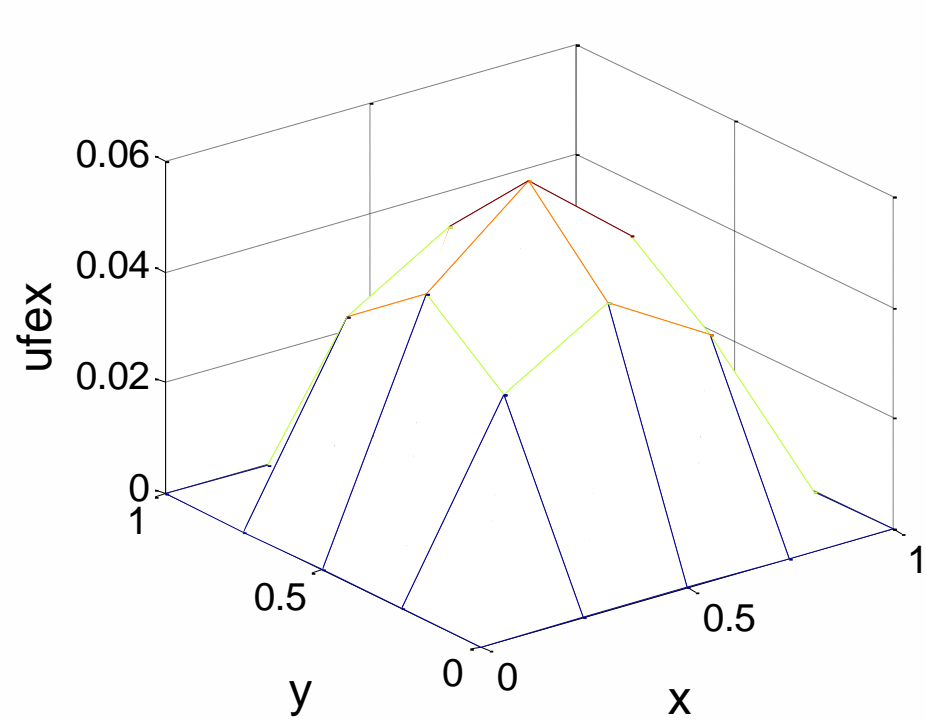
$$u(x, y) = x(x-1)y(y-1)$$

Malla de  $2n^2$  elementos  
finitos lineales

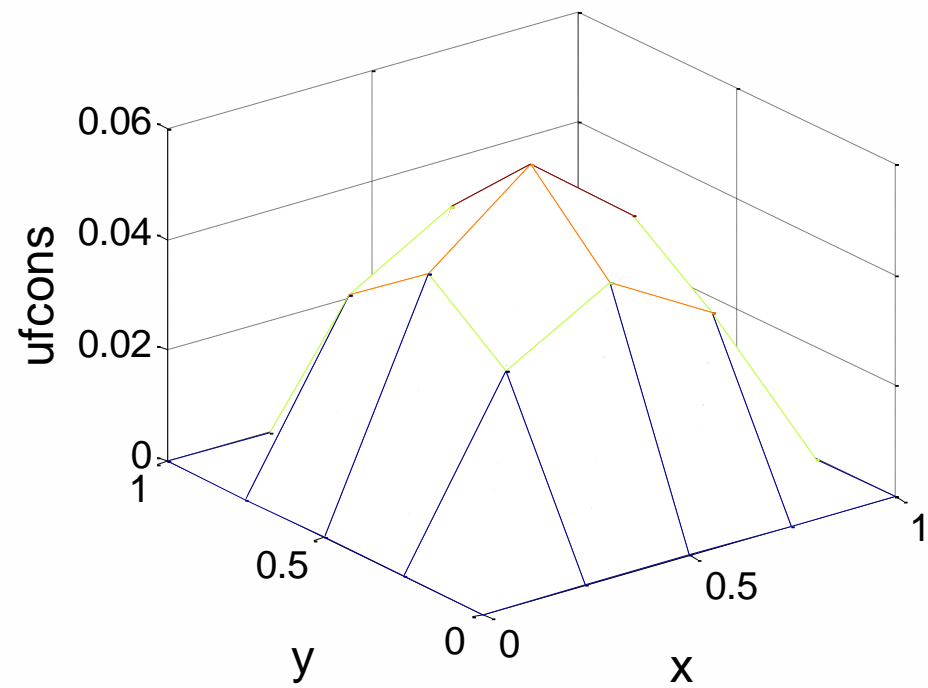


Numeración local elementos  
inferior y superior

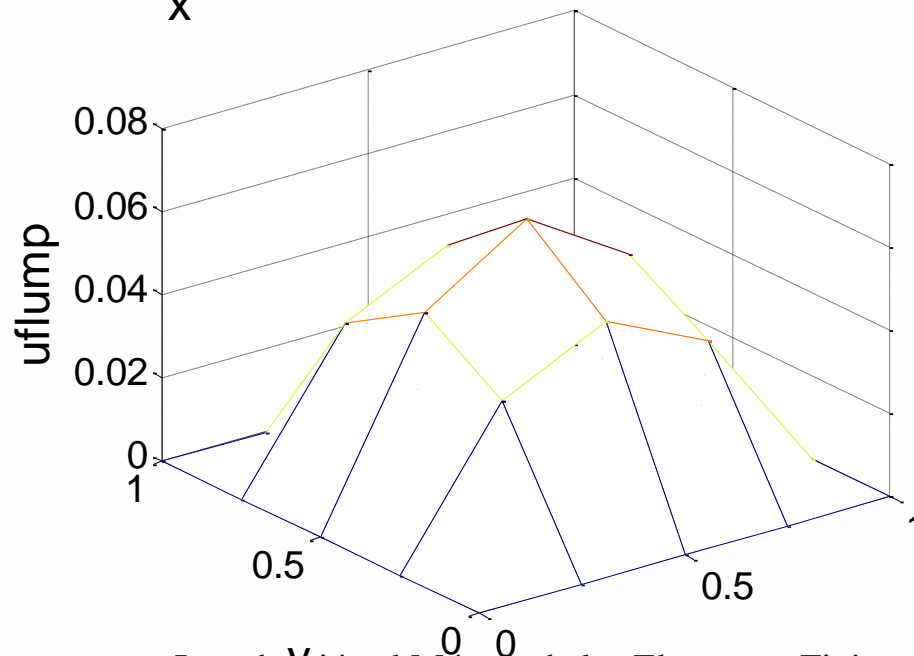




Solución con  
vector de cargas  
“exacto”

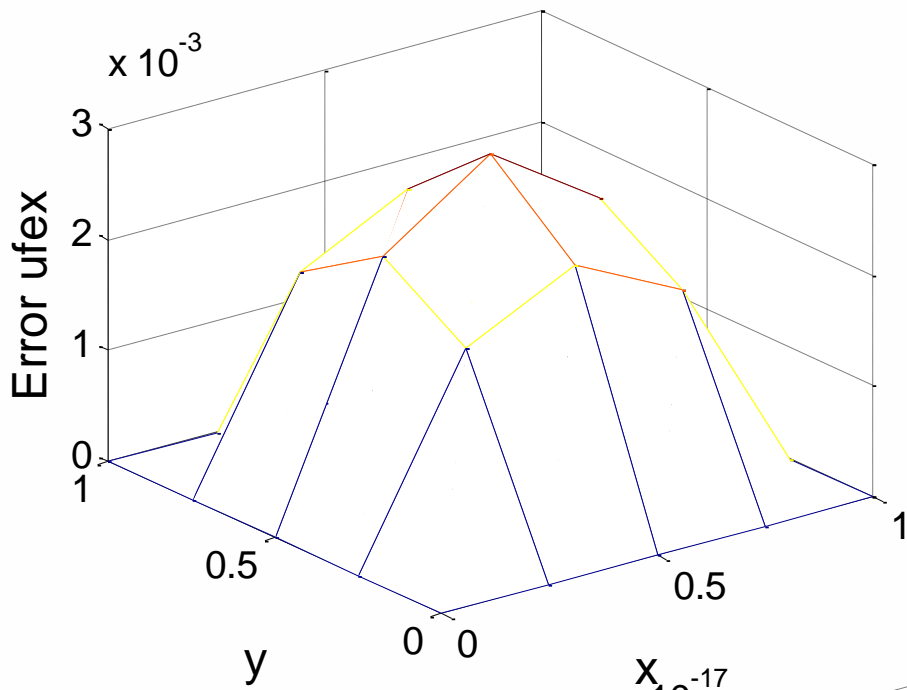


Solución con  
vector de cargas  
“consistentes”

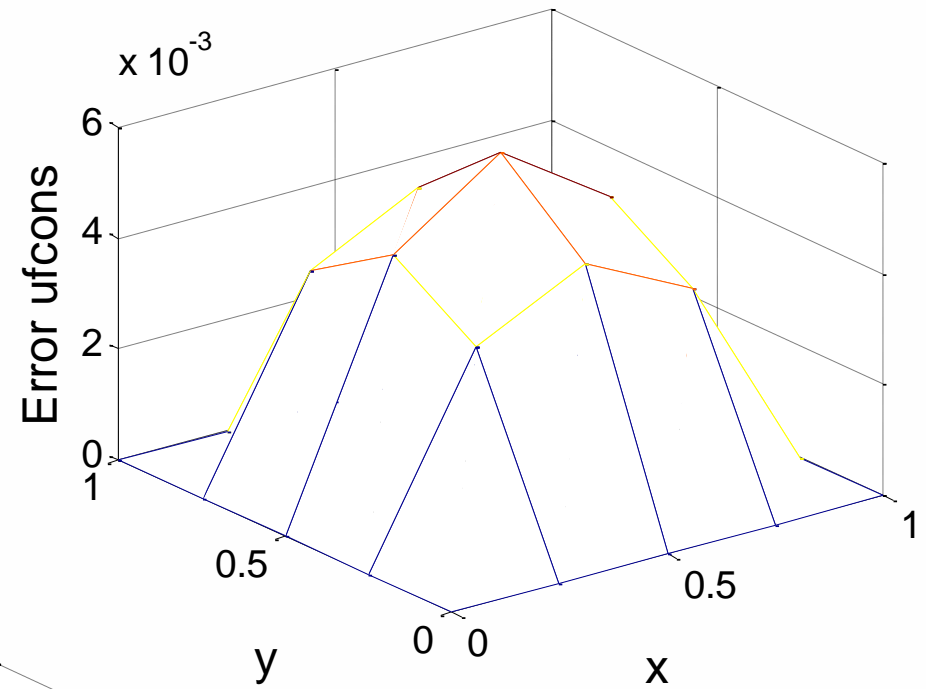


Solución con  
vector de cargas  
“concentradas”

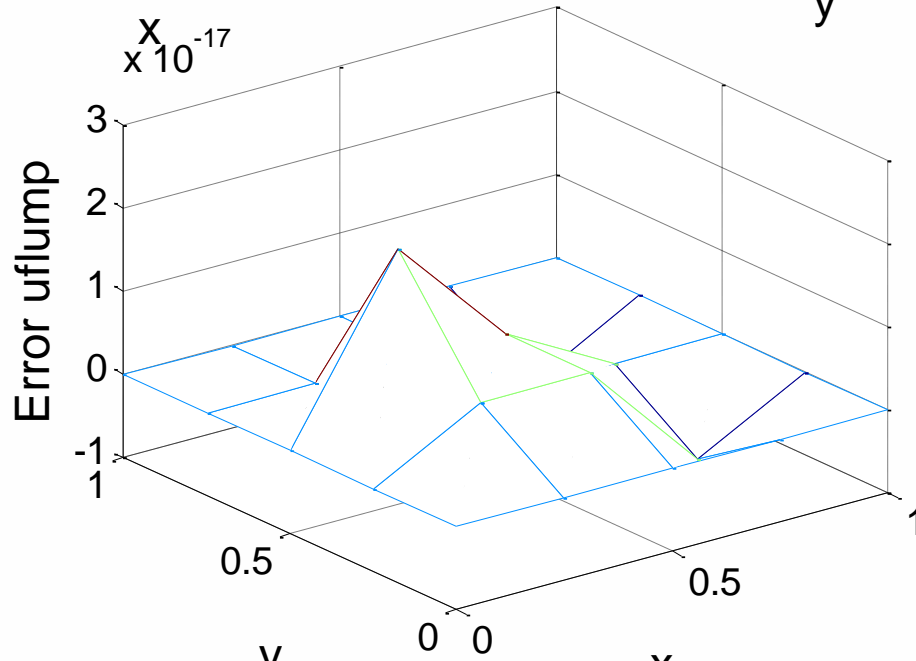




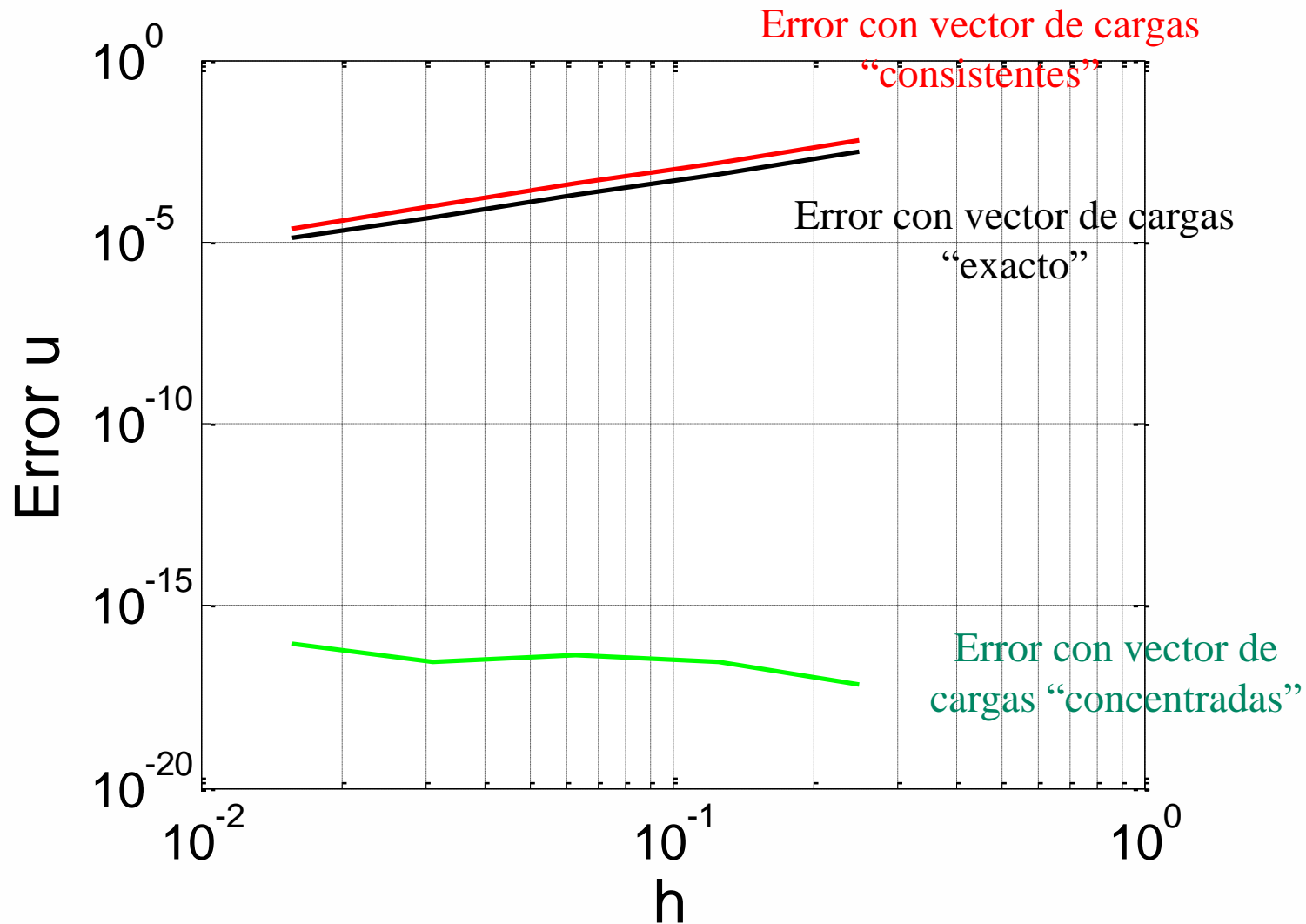
Error con vector de cargas "exacto"



Error con vector de cargas "consistentes"



Error con vector de cargas "concentradas"



En este caso se observa "superconvergencia" para el caso de cargas concentradas (no es siempre así, depende del caso)

## Ejemplo

Tratamos  
la ecuación:

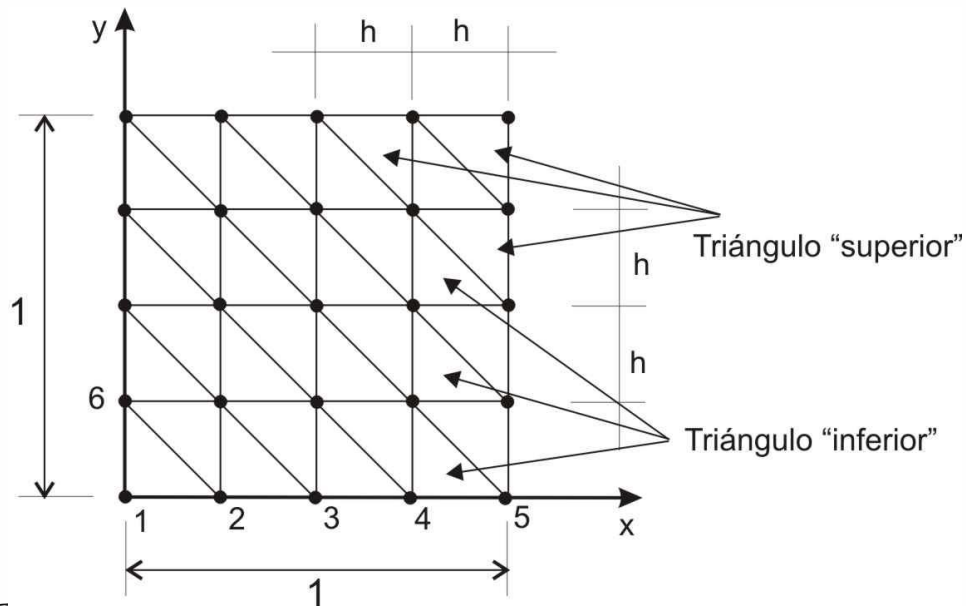
$$-\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad 0 < x, y < 1$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0$$

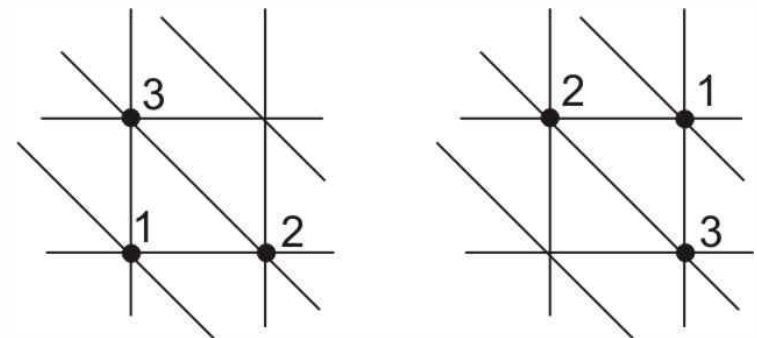
Solución exacta:

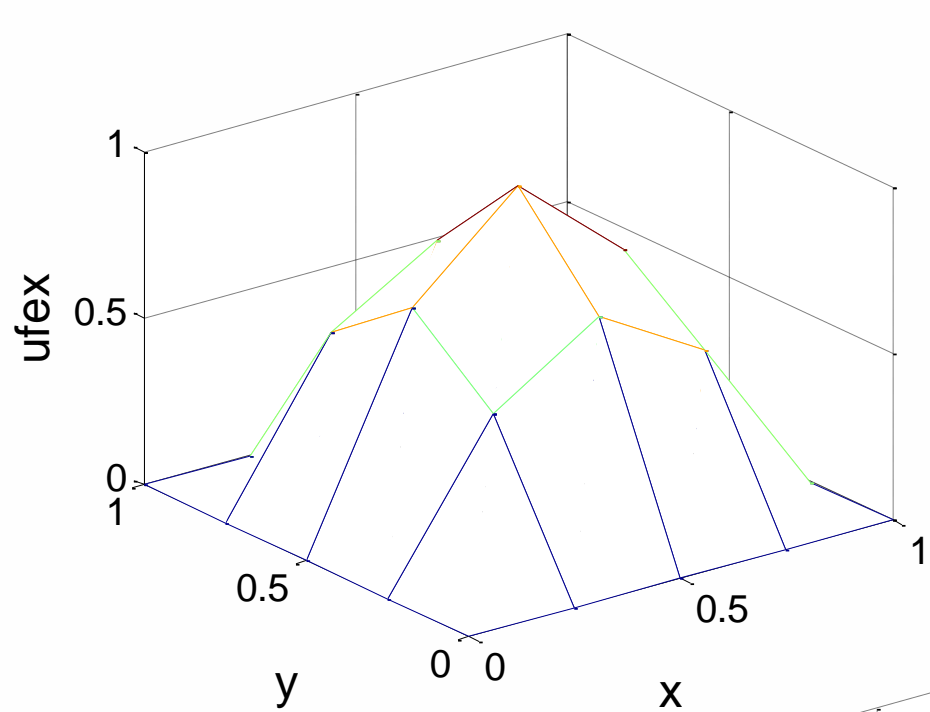
$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Malla de  $2n^2$  elementos  
finitos lineales

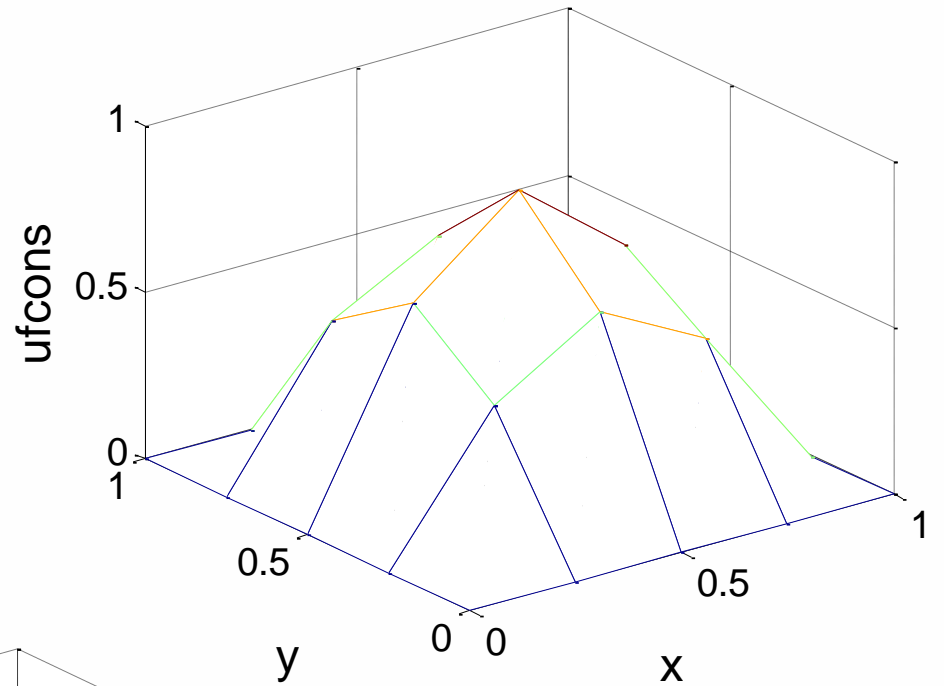


Numeración local elementos  
inferior y superior

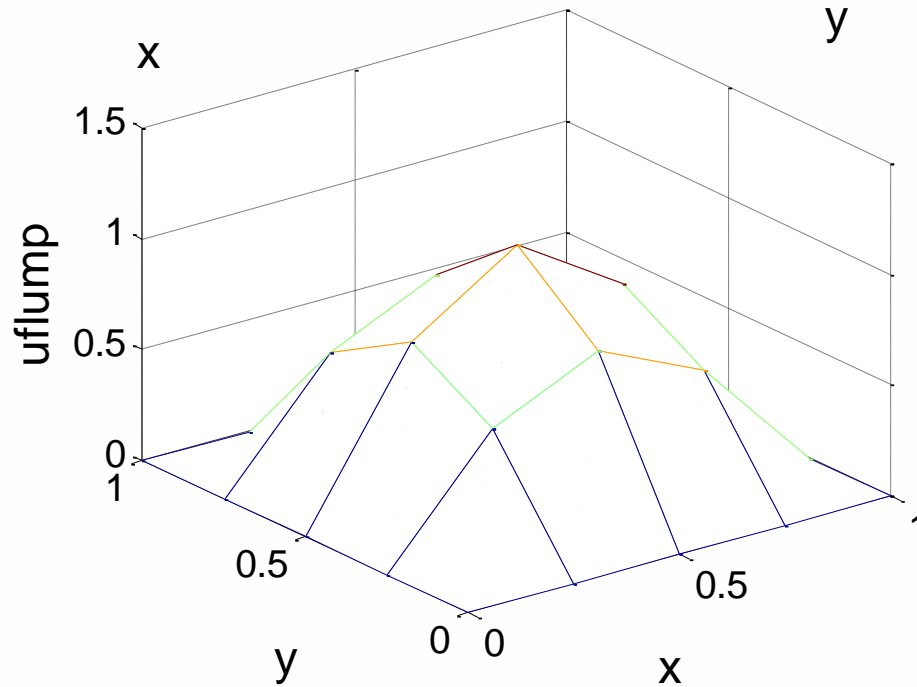




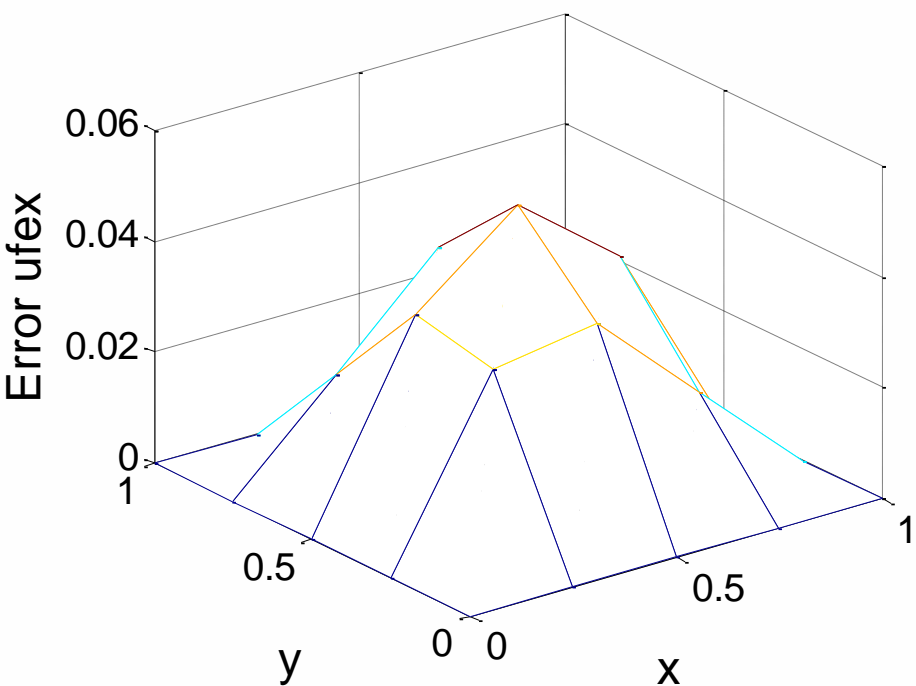
Solución con  
vector de cargas  
“exacto”



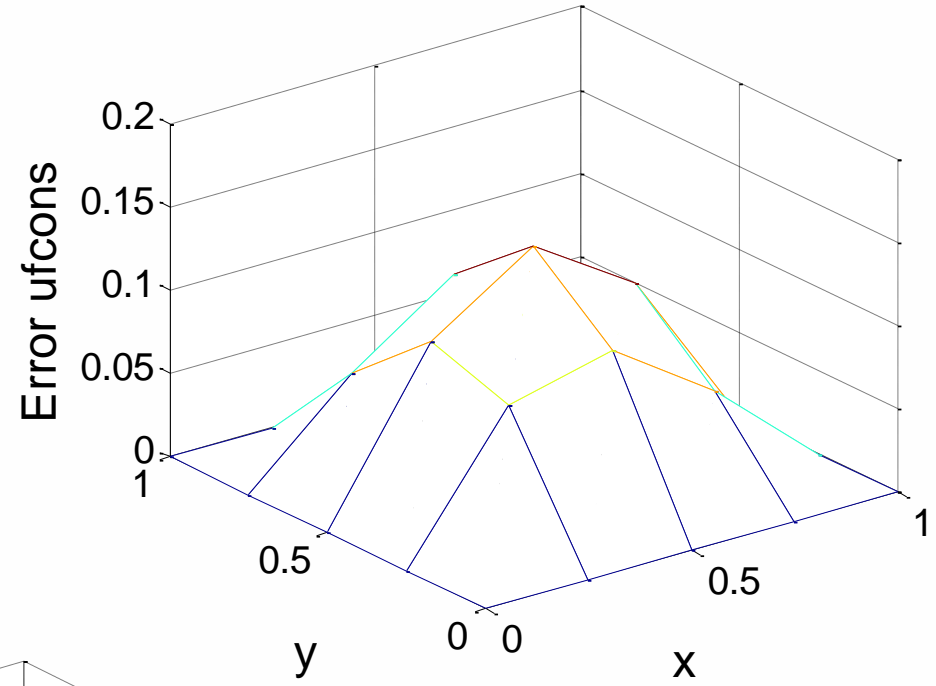
Solución con  
vector de cargas  
“consistentes”



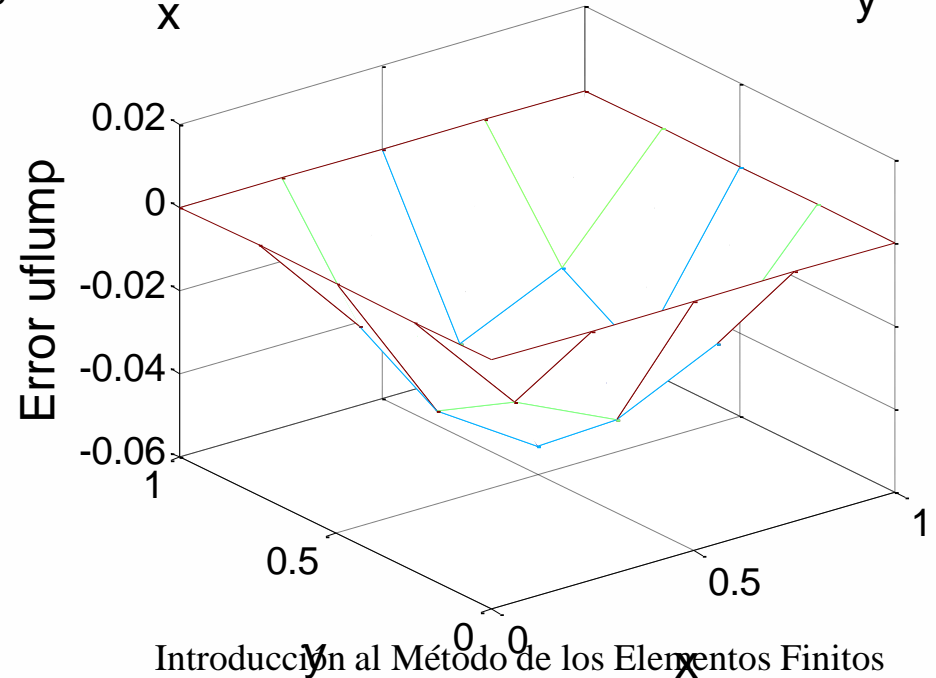
Solución con  
vector de cargas  
“concentradas”



Error con vector de cargas "exacto"

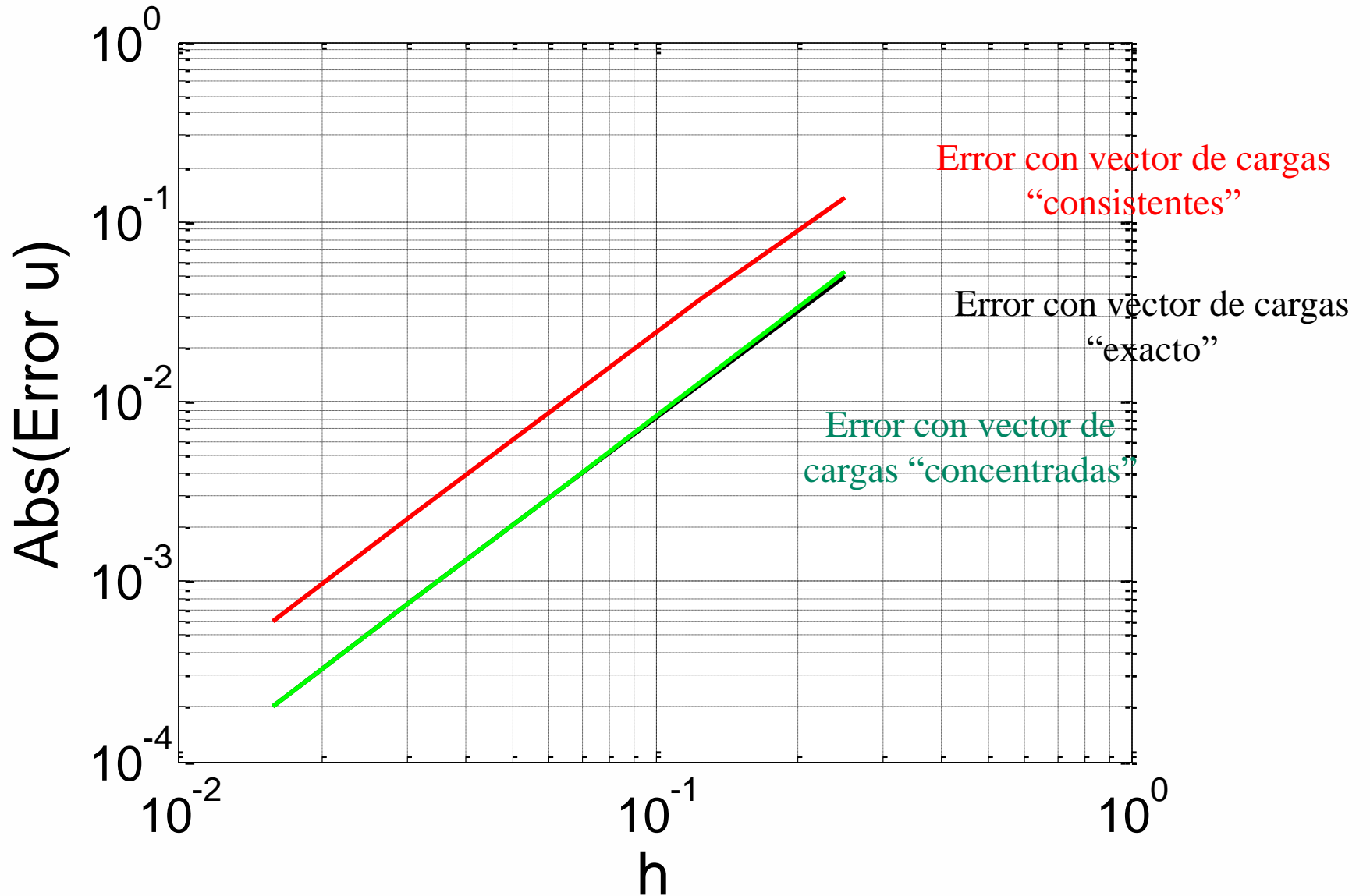


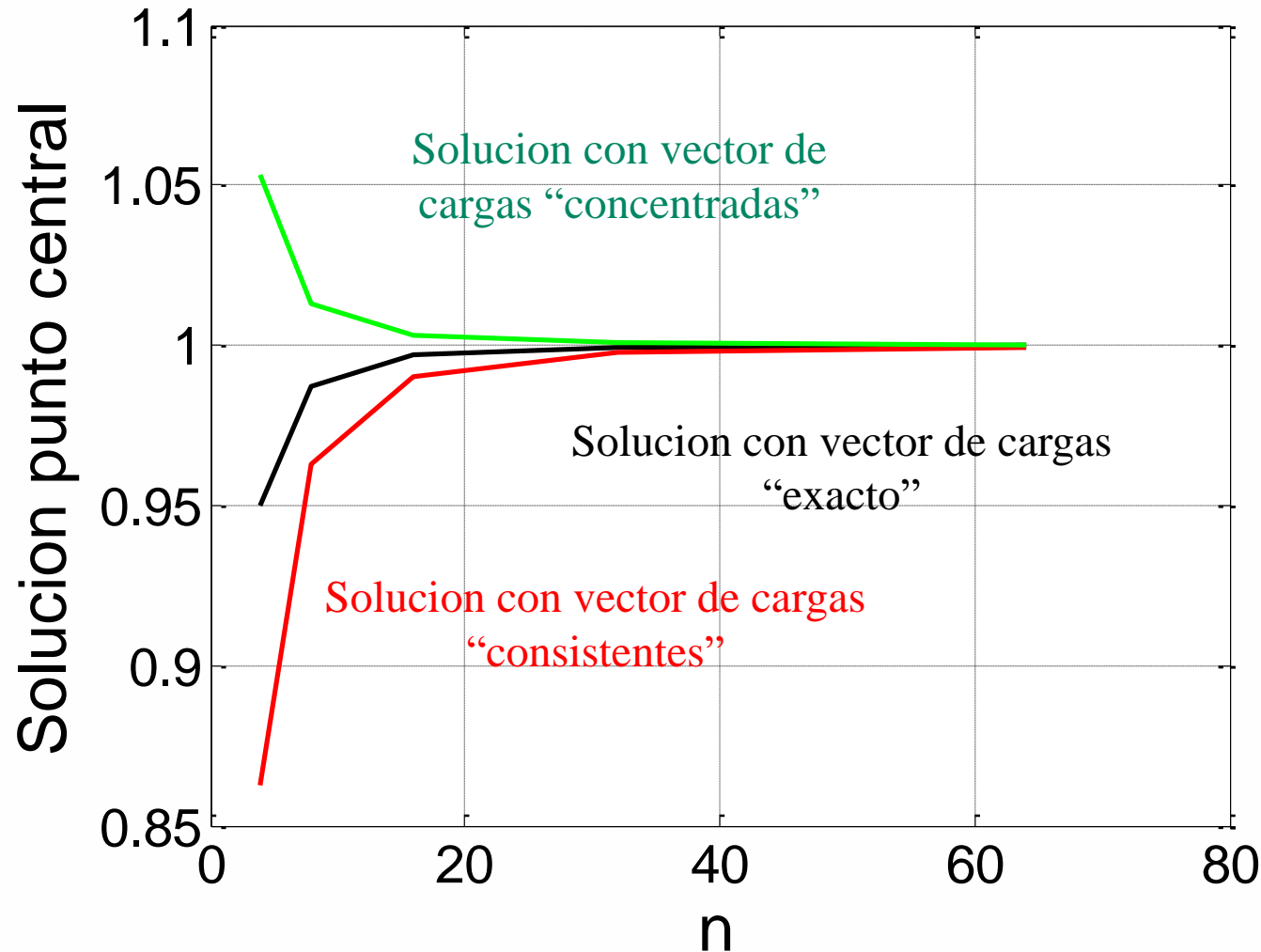
Error con vector de cargas "consistentes"



Error con vector de cargas "concentradas"







La solución con cargas concentradas pierde la "monotonía" (solución "desde abajo" de los modelos tipo desplazamiento)