

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 2

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

7-Oct-2011

Espacios de Hilbert

1. En formulaciones variacionales para solución de BVP, trabajaremos con espacios V más grandes que los vistos hasta ahora, llamados espacios de Hilbert. Se dotará a V de varios productos escalares determinados por el BVP.

2. Sucesión de Cauchy: sucesión $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ que verifica

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \|v_i - v_j\| < \varepsilon \text{ si } i, j > N$$

La sucesión de Cauchy converge a v si $\|v - v_i\| \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$

3. Espacio de Hilbert: Es un espacio lineal V , equipado de producto escalar y norma asociada, *completo* (o sea que las sucesiones de Cauchy convergen respecto de la norma del espacio).

Espacios de Hilbert: ejemplos 1D

- Espacio $L_2(I)$ de funciones de cuadrado integrable en $I=(a,b)$

$$L_2(I) = \left\{ v : v \text{ está definida en } I \text{ y } \int_I v^2 dx < \infty \right\}$$

dotado del producto interno: $(v, w) = \int_I vw dx$

y la norma: $\|v\|_{L_2(I)} = \left(\int_I v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (v, v)^{\frac{1}{2}}$

La desigualdad de Cauchy: $|(v, w)| \leq \|v\|_{L_2(I)} \|w\|_{L_2(I)}$

Ejemplo: $v(x) = x^{-\beta}$, $x \in I = (0,1)$

$$\|v\|_{L_2(0,1)}^2 = \int_0^1 x^{-2\beta} dx = \begin{cases} \ln x \Big|_0^1 = \infty & \text{si } \beta = 1/2 \\ \frac{x^{1-2\beta}}{1-2\beta} \Big|_0^1 = \begin{cases} \infty & \text{si } \beta > 1/2 \\ (1-2\beta)^{-1} & \text{si } \beta < 1/2 \end{cases} & \text{si } \beta \neq 1/2 \end{cases} \Rightarrow v \in L_2(0,1) \text{ si } \beta < 1/2$$

Espacios de Hilbert: ejemplos 1D (cont.)

- Espacio $H^1(I)$ en $I=(a,b)$: $H^1(I) = \{v : v, v' \in L_2(I)\}$

dotado del producto interno: $(v, w)_{H^1(I)} = \int_I (vw + v'w') dx$

y la norma: $\|v\|_{H^1(I)} = \left\{ \int_I [v^2 + (v')^2] dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left[(v, v)_{H^1(I)} \right]^{\frac{1}{2}}$

- Espacio $H_0^1(I)$ en $I=(a,b)$: $H_0^1(I) = \{v : v \in H^1(I) \text{ y } v(a) = v(b) = 0\}$

- Dado el problema modelo: **(D)**
$$\begin{cases} -u'' = f(x), & x \in I \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

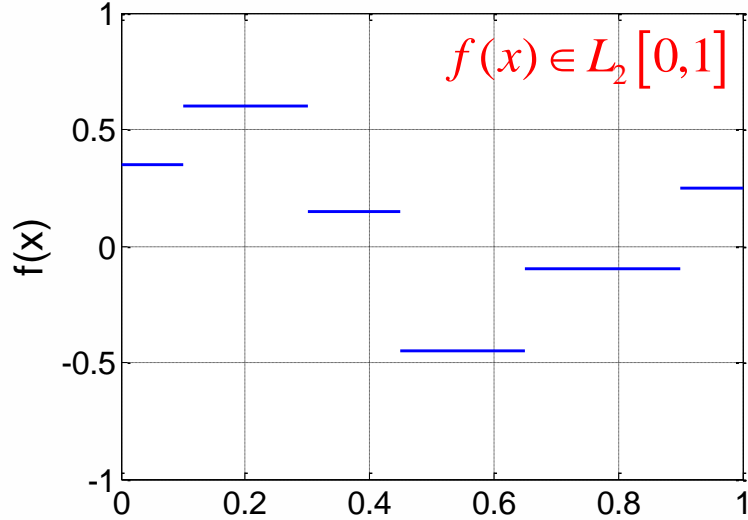
luego: **(V)** Hallar $u \in H_0^1(I) / (u', v') = (f, v) \forall v \in H_0^1(I)$

- **Nota:**

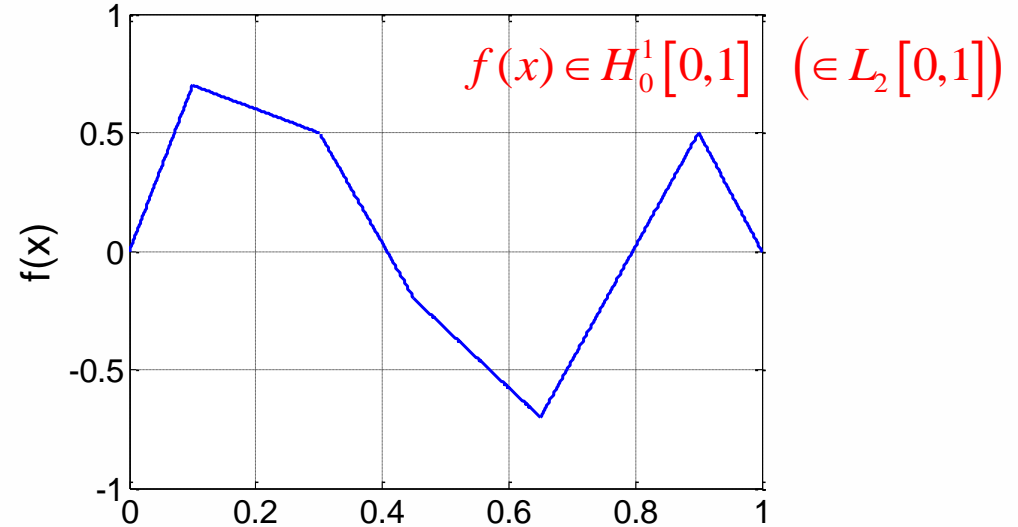
- $H_0^1(I)$ es más grande que el espacio V de funciones lineales a trozos que veníamos usando.
- En MEF, la norma del error es simplemente la norma en $H^1(I)$.

Ejemplos funciones polinomiales a trozos

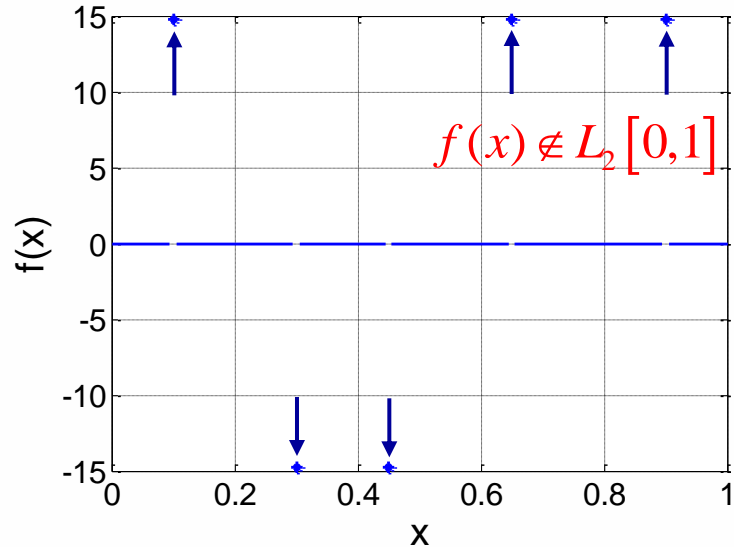
Funcion constante por tramos, discontinua $\notin C^0[0,1]$



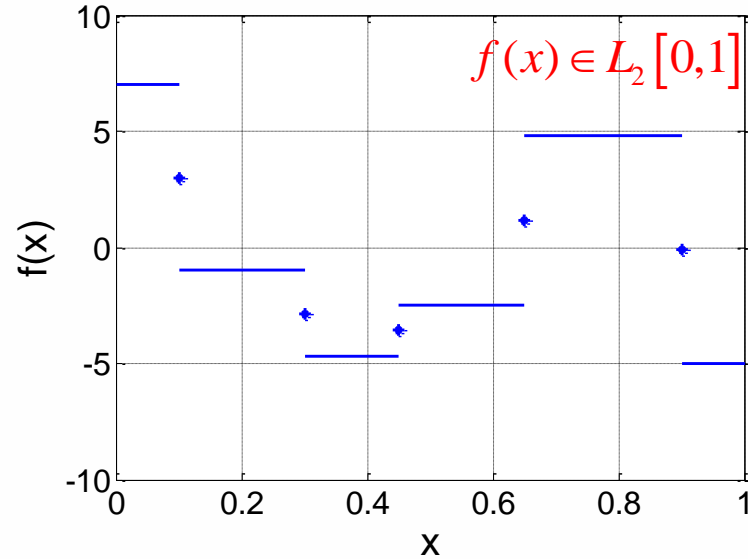
Funcion lineal por tramos, continua $\in C^0[0,1]$



Derivada de func.cte. por tramos discontinua

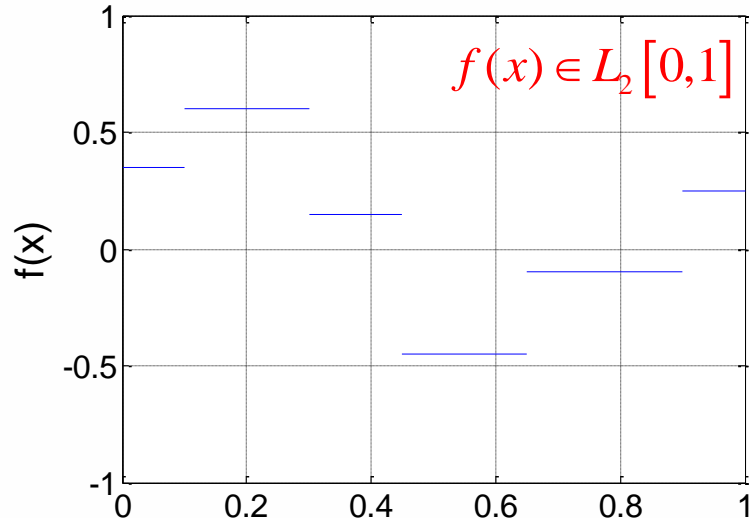


Derivada de funcion lineal por tramos continua

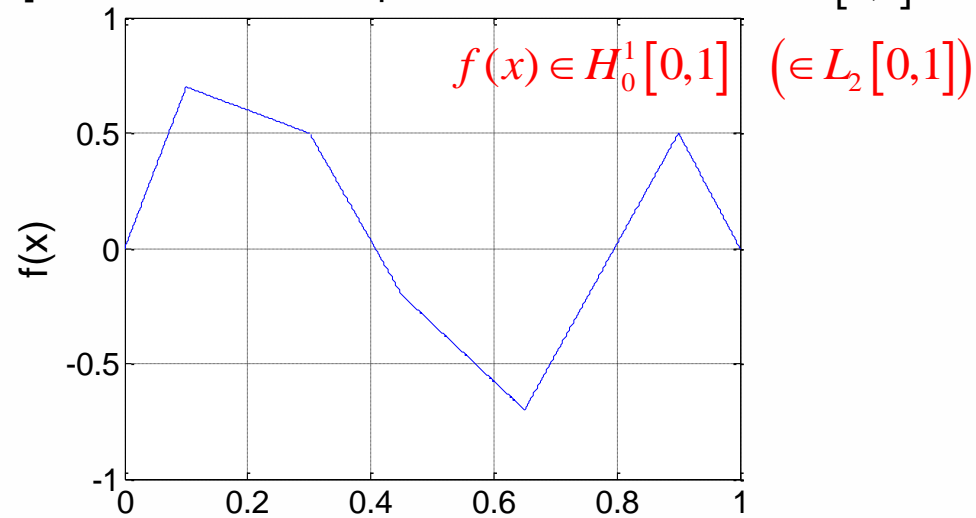


Ejemplos funciones polinomiales a trozos

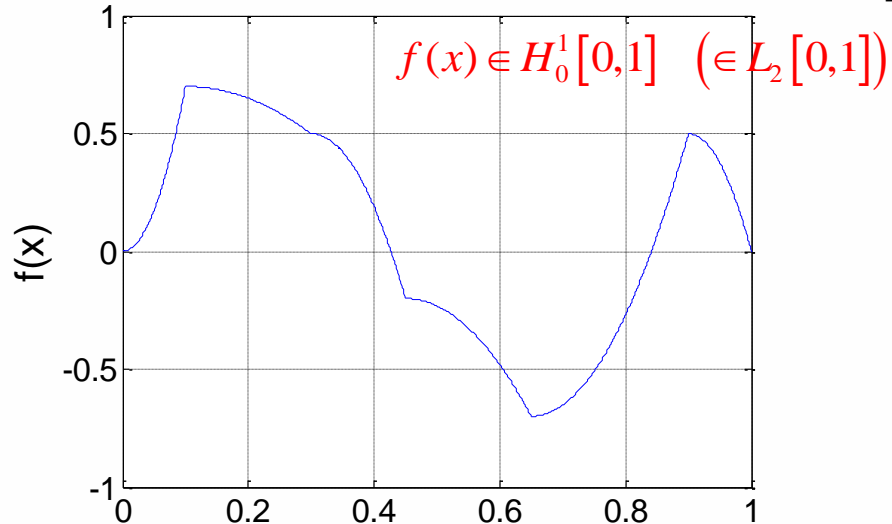
Funcion constante por tramos, discontinua $\notin C^0[0,1]$



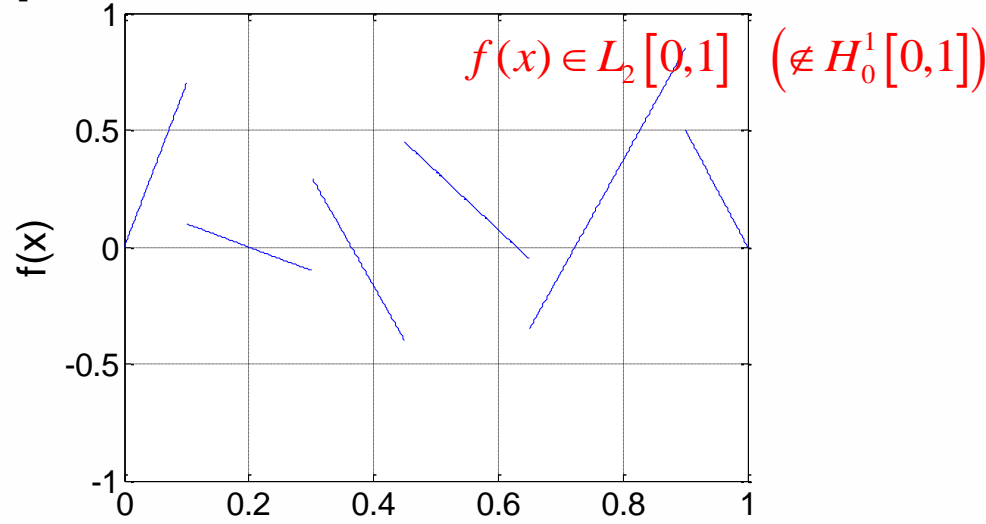
Funcion lineal por tramos, continua $\in C^0[0,1]$



Funcion cuadratica por tramos, continua $\in C^0[0,1]$



Funcion lineal por tramos, discontinua $\notin C^0[0,1]$



Espacios de Hilbert en $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d=2,3$

- $L_2(\Omega) = \left\{ v : v \text{ está definida en } \Omega \text{ y } \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\}$

- Producto escalar: $(v, w) = \int_{\Omega} vw d\Omega$

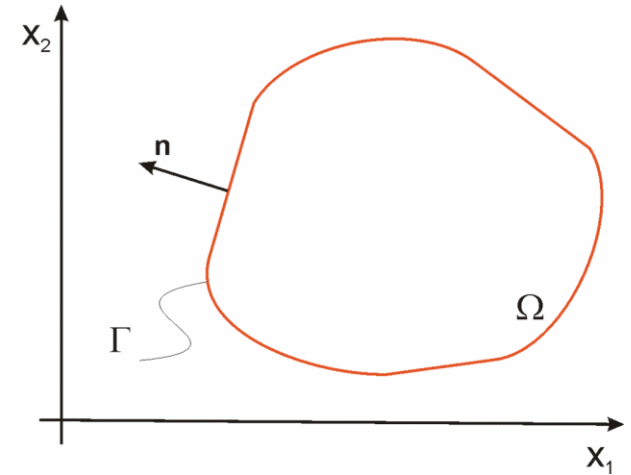
- Norma: $\|v\| = \left(\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$

- $H^1(\Omega) = \left\{ v : v \in L_2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1, \dots, d \right\}$

- Producto escalar: $(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (vw + \nabla v \cdot \nabla w) d\Omega$

- Norma: $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} (v^2 + \nabla v \cdot \nabla v) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[(v, v)_{H^1(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$

- $H_0^1(\Omega) = \left\{ v : v \in H_1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0 \right\}$



Espacios de Hilbert en $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d=2,3$ (cont.)

- Dado el problema modelo (ec. de Poisson + CB homogéneas)

$$(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

luego: (\mathbf{V}) Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ / $\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, d\Omega}_{(f,v)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

o, equivalentemente:

$$(\mathbf{M}) \quad \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) / \underbrace{\frac{1}{2} a(u,u) - (f,u)}_{F(u)} \leq \underbrace{\frac{1}{2} a(v,v) - (f,v)}_{F(v)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- Nota:** (\mathbf{V}) se dice la formulación débil de (\mathbf{D}) , y la solución de (\mathbf{V}) es la solución débil de (\mathbf{D}) . Ésta no es necesariamente una solución clásica de (\mathbf{D}) . Para que lo sea, u debe ser suficientemente regular de modo que Δu esté definida en el sentido clásico.

Interpretación geométrica del MEF

Consideremos el BVP de difusión-reacción con CB homogéneas:

$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

$$(V) \quad \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) / \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega}_{\langle u, v \rangle} = \underbrace{\int_{\Omega} fv \, d\Omega}_{(f, v)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Sea V_h un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$. El MEF aplicado al problema de difusión-reacción da:

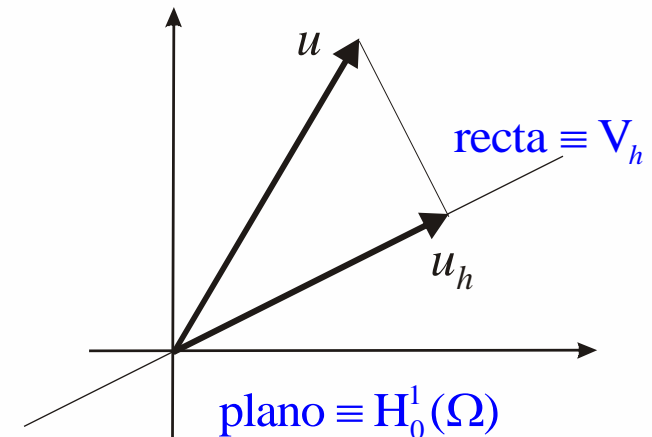
$$(V_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h / \langle u_h, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

Tomando $v \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ en (V), (V)-(V_h) resulta:

$$\langle u - u_h, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_h$$

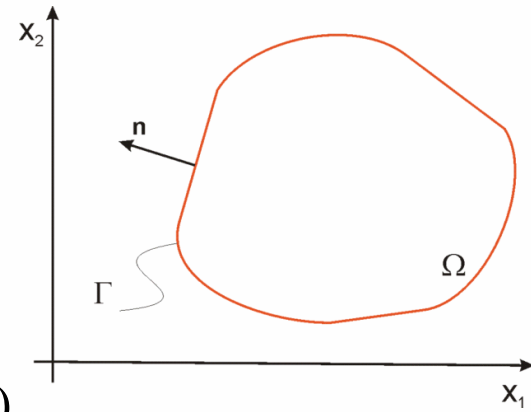
La solución MEF u_h es la proyección con resp a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de la solución exacta u sobre V_h , o sea que u_h es el elemento de V_h más próximo u con resp a $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$, i.e.:

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in V_h$$



CB naturales y esenciales

Consideremos el BVP de difusión-reacción con CB Neumann:



$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

(V) Hallar $u \in H^1(\Omega)$ /

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) d\Omega}_{\langle u, v \rangle} = \underbrace{\int_{\Omega} f v d\Omega}_{(f, v)} + \underbrace{\int_{\Gamma} g v d\Gamma}_{(g, v)_{\Gamma}} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + (g, v)_{\Gamma}$$

(M) Hallar $u \in H^1(\Omega)$ / $F(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - (f, u) - (g, u)_{\Gamma} \leq F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

- La CB Neumann, que no tiene que ser impuesta explícitamente sobre u , se denomina CB natural.
- La CB Dirichlet $u=u_0$ sobre Γ , que debe ser satisfecha explícitamente por u , se conoce como CB esencial.

Problema continuo en forma abstracta

- Objetivos:
 - Dar un tratamiento unificado a muchos problemas de la Mecánica y la Física, a fin de no repetir el mismo argumento en distintos casos concretos.
- Entender la estructura básica del MEF.

Los ingredientes de una formulación abstracta son:

1. Un espacio de Hilbert V , con producto escalar $(\cdot, \cdot)_V$ y norma $\|\cdot\|_V$, donde se busca la solución.
2. Una forma bilineal $\mathbf{a}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, determinada por el problema (elíptico) a resolver, t.q. $\forall u, v \in V$:
 - $\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{a}(v, u)$ (simetría)
 - $\exists \gamma > 0 / |\mathbf{a}(u, v)| \leq \gamma \|u\|_V \|v\|_V$ (continuidad)
 - $\exists \alpha > 0 / \mathbf{a}(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ (coercividad o V -elipticidad)
3. Una forma lineal $\mathbf{L}: V \rightarrow \mathbb{R}$, determinada por los datos del problema, continua, i.e.,
 - $\exists \lambda > 0 / |\mathbf{L}(v)| \leq \lambda \|v\|_V \quad \forall v \in V$

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos (cont)

(**M**) Hallar $u \in V$ / $F(u) = \min_{v \in V} F(v)$, con $F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$

(**V**) Hallar $u \in V$ / $a(u, v) = L(v)$, $\forall v \in V$

Teorema: (**M**) y (**V**) son equivalentes, i.e., u satisface (**M**) si y sólo si u satisface (**V**). Además, $\exists! u \in V$, y se verifica la estimación de estabilidad

$$\|u\|_V \leq \frac{\lambda}{\alpha}$$

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos (cont)

Demo. (M) \Rightarrow (V): sea $v \in V$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Luego, $v + \varepsilon u \in V$, así que

$$F(u) \leq \underbrace{F(u + \varepsilon v)}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g \text{ tiene un mínimo en } \varepsilon = 0$$

$$\text{Siendo } g(\varepsilon) = \frac{1}{2} a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - L(u + \varepsilon v)$$

$$= \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{\varepsilon}{2} a(u, v) + \frac{\varepsilon}{2} a(v, u) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v, v) - L(u) - \varepsilon L(v)$$

$$= \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) + \varepsilon a(u, v) - \varepsilon L(v) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v, v)$$

$$\text{luego } g'(\varepsilon) = a(u, v) - L(v) + \varepsilon a(v, v)$$

Como g tiene un mínimo en 0, debe cumplirse

$$g'(0) = a(u, v) - L(v) = 0 \quad \text{(V)} \quad \text{(QED)}$$

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos (cont)

Demo. (V) \Rightarrow (M): dados u (solución) y w (arbitrario) en V , $u+w \in V$, así que

$$\begin{aligned} F(u+w) &= \frac{1}{2} a(u+w, u+w) - L(u+w) \\ &= \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2} a(u, w) + \frac{1}{2} a(w, u) + \frac{1}{2} a(w, w) - L(u) - L(w) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} a(u, u) - L(u)}_{=F(u)} + \underbrace{a(u, w) - L(w)}_{=0 \quad (V)} + \frac{1}{2} \underbrace{a(w, w)}_{\geq 0} \geq F(u), \end{aligned} \quad \text{(M) (QED)}$$

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos (cont)

Demo. estimación de estabilidad:

$$\begin{array}{l} a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \\ \underbrace{\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u)}_{\text{V-elipticidad de } a} = \underbrace{L(u) \leq \lambda \|u\|_V}_{\text{Continuidad de } L} \Rightarrow \|u\|_V \leq \frac{\lambda}{\alpha} \quad \text{(QED)} \end{array}$$

Demo. unicidad: supongamos que $u_1, u_2 \in V$ sean soluciones de (V)

$$\begin{array}{l} a(u_1, v) = L(v) \quad \forall v \in V \\ a(u_2, v) = L(v) \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V \end{array}$$

Definiendo $u = u_1 - u_2$, llego a un nuevo BVP con $L(v) = 0 \quad \forall v \in V$, i.e. $\lambda = 0$. Luego:

Estimación de estabilidad $\|u\|_V = 0 \Rightarrow u = u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \quad \text{(QED)}$

Estimación del error de discretización

- Sea V_h un subespacio de V , con dimensión finita M , y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$ una base para V_h , de modo que toda $v \in V_h$ puede representarse

$$v = \sum_{i=1}^M \varphi_i \eta_i, \quad \eta_i \in \mathbb{R}$$

- Usando V_h , obtenemos los problemas discretos análogos a **(M)** y **(V)**:

(M_h) Hallar $u_h \in V_h / F(u_h) \leq F(v), \forall v \in V_h$

(V_h) Hallar $u_h \in V_h / a(u_h, v) = L(v), \forall v \in V_h$

– Como $\varphi_j \in V_h \Rightarrow a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j), j = 1, 2, \dots, M$

– Como $u_h \in V_h \Rightarrow u_h = \sum_{i=1}^M \varphi_i \xi_i, \xi_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^M a(\varphi_i, \varphi_j) \xi_i = L(\varphi_j), j = 1, 2, \dots, M$

– Forma matricial de (V_h) : **$A\xi = b$** con $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), b_j = L(\varphi_j)$.

Estimación del error de discretización (cont)

- Dado que $a(.,.)$ es simétrica: $a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i) \Rightarrow A_{ij} = A_{ji}$
 \Rightarrow la matriz \mathbf{A} es simétrica

- Dado que $a(.,.)$ es V-elíptica:

$$a(v, v) = a\left(\sum_{i=1}^M \varphi_i \eta_i, \sum_{j=1}^M \varphi_j \eta_j\right) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \eta_i a(\varphi_i, \varphi_j) \eta_j = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} \geq \alpha \|v\|_V^2 > 0 \text{ si } v \neq 0 \ (\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0})$$

\Rightarrow la matriz \mathbf{A} es positiva definida

\Rightarrow la matriz \mathbf{A} es no singular

$\Rightarrow \exists! \boldsymbol{\xi} / \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{b} \Rightarrow \exists! u_h \in V_h$ solución de (V_h)

Además, $u_h \in V_h$ verifica la estimación de estabilidad $\|u_h\|_V \leq \frac{\lambda}{\alpha}$

Demo.: $a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h$

$$\underbrace{\alpha \|u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u_h)}_{\text{V-elipticidad de } a} = \underbrace{L(u_h) \leq \lambda \|u_h\|_V}_{\text{Continuidad de } L}$$

Estimación del error de discretización (cont)

- Teorema: Sea $u \in V$ la solución de (V) y $u_h \in V_h \subset V$. Entonces:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_h$$

- Demo.:

1. u solución de (V) $\Rightarrow a(u, w) = L(w), \forall w \in V_h \subset V$

2. u_h solución de (V_h) $\Rightarrow a(u_h, w) = L(w), \forall w \in V_h$

3. Restando: $a(u - u_h, w) = 0, \forall w \in V_h$

4. Sea $w = u_h - v$, con $v \in V_h$ arbitrario.

5. Operando: $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h)$ \leftarrow V-elasticidad de a

$$= a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, w)$$

$$= a(u - u_h, u - u_h + w)$$

Continuidad de $a \longrightarrow = a(u - u_h, u - v) \leq \gamma \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V$ (QED)

Norma de energía

Considerando

1. $a(.,.)$ es continua, i.e., $\exists \gamma > 0 / |a(u, v)| \leq \gamma \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$
2. $a(.,.)$ es V-elíptica o coerciva, i.e., $\exists \alpha > 0 / a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$

podemos definir una nueva norma llamada norma de energía:

$$\|v\|_a = [a(v, v)]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in V$$

Esta norma es equivalente a $\|\cdot\|_V$, i.e., \exists constantes positivas $c = \sqrt{\alpha}$, $C = \sqrt{\gamma}$, tal que

$$c \|v\|_V \leq \|v\|_a \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

El producto escalar asociado a $\|\cdot\|_a$ es $(u, v)_a = a(u, v)$

Verifica la desigualdad de Cauchy $|(u, v)_a| \leq \|u\|_a \|v\|_a$

Estimación del error de discretización en norma de energía

- Teorema: Sea $u \in V$ la solución de (V) y $u_h \in V_h \subset V$. Entonces:

$$\|u - u_h\|_a \leq \|u - v\|_a \quad \forall v \in V_h$$

\Rightarrow Medida en la norma de energía, u_h es la mejor aproximación a u .

- Demo.:

1. u solución de $(V) \Rightarrow (u, w)_a = L(w), \forall w \in V_h \subset V$

2. u_h solución de $(V_h) \Rightarrow (u_h, w)_a = L(w), \forall w \in V_h$

3. Restando: $(u - u_h, w)_a = 0, \forall w \in V_h$

4. Sea $w = u_h - v$, con $v \in V_h$ arbitrario.

5. Operando: $\|u - u_h\|_a^2 = (u - u_h, u - u_h)_a$

$$= (u - u_h, u - u_h)_a + (u - u_h, w)_a$$

$$= (u - u_h, u - u_h + w)_a$$

Desigualdad de Cauchy \longrightarrow $= (u - u_h, u - v)_a \leq \|u - u_h\|_a \|u - v\|_a$ **(QED)**

Ejemplos concretos

Ejemplo 1: sea $V=H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

$$L(v) = \int_{\Omega} fv dx, \quad f \in L_2(\Omega)$$

En este caso, $a(u, v) = L(v)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$ es la forma débil del problema de Neumann

$$(D) \quad -\Delta u + u = f \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

Se verifica $\forall v, w \in H^1(\Omega)$

- $a(v, w) = a(w, v) \Rightarrow a(.,.)$ es una forma bilineal simétrica
- $a(v, v) = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \Rightarrow a(.,.)$ es V-elíptica con $\alpha=1$
- $a(v, w) \leq [a(v, v)]^{\frac{1}{2}} [a(w, w)]^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow a(.,.)$ es continua con $\gamma=1$
- $|L(v)| = \int_{\Omega} fv dx \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \Rightarrow L(.)$ es continua con $\lambda = \|f\|_{L_2(\Omega)}$
 - Estimación de estabilidad: $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}$
 - Estimación de error: $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 2: sea $V=H_0^1(I)$, $I = (0,1)$, $a(v, w)=\int_I v'w' dx$, $L(v)=\int_I fv dx$.

En este caso, $a(u, w) = L(v)$, $\forall v \in H_0^1(I)$ es la forma débil del problema:

$$(D) \quad -u'' = f \text{ en } I, \quad u(a) = u(b) = 0$$

- Se verifica $\forall v, w \in H_0^1(I)$

$$a(v, w) = a(w, v) \Rightarrow a(.,.) \text{ es simétrica}$$

$$|a(v, w)| \leq \|v'\|_{L_2(I)} \|w'\|_{L_2(I)} \leq \|v\|_{H^1(I)} \|w\|_{H^1(I)} \Rightarrow a(.,.) \text{ es continua con } \gamma = 1$$

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_{H^1(I)}^2 \Rightarrow a(.,.) \text{ es V-elíptica con } \alpha = 1/2$$

$$|L(v)| = \left| \int_I fv dx \right| \leq \|f\|_{L_2(I)} \|v\|_{L_2(I)} \Rightarrow L(.) \text{ es continua con } \lambda = \|f\|_{L_2(I)}$$

- Luego:

$$- \text{ Estimación de error: } \|u - u_h\|_{H^1(I)} \leq 2 \|u - v\|_{H^1(I)} \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

$$- \text{ Estimación de estabilidad: } \|u\|_{H^1(I)} \leq \|f\|_{L_2(I)}$$

Ejemplos concretos (cont. Ejemplo 2)

Demo. de V-elasticidad de $a(.,.)$:

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(y) dy$$

$$|v(x)| \leq \int_0^x |v'(y)| dy \leq \int_0^1 1 \cdot |v'| dy \leq \underbrace{\left(\int_0^1 1^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (v')^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{Desigualdad de Cauchy}}$$

$$\int_0^1 v^2 dx \leq \int_0^1 \int_0^1 (v')^2 dy dx = \int_0^1 (v')^2 dx$$

$$\underbrace{\int_0^1 v^2 dx + \int_0^1 (v')^2 dx}_{\|v\|_{H^1(0,1)}} \leq 2 \underbrace{\int_0^1 (v')^2 dx}_{a(v,v)} \quad \text{(QED)}$$

Teorema: $\forall v \in H^1(\Omega), \exists$ cte. $C > 0$ dependiente de Ω , t.q.

$$\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|v\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \quad \text{Desigualdad de Poincaré-Friedrichs}$$

- Para $\Omega \equiv I = (0,1), v(0)=0$, resulta $C = 1$.

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 3: sea $V=H_0^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a(u, v)=\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$, $L(v)=\int_{\Omega} f v d\Omega$.

En este caso, $a(u, v)=L(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ es la forma débil del problema de Poisson

$$(D) \quad -\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

- Se verifica $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$

$$a(v, w) = a(w, v) \Rightarrow a(.,.) \text{ es simétrica}$$

$$|a(v, w)| \leq \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow a(.,.) \text{ es continua con } \gamma = 1$$

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v d\Omega \geq C^{-1} \int_{\Omega} v^2 d\Omega, \quad C \in \mathbb{R}^+ \quad \leftarrow \text{Desigualdad de Poincaré-Friedrichs}$$

$$\underbrace{(C+1)}_{=1/\alpha} a(v, v) \geq \underbrace{\int_{\Omega} v^2 d\Omega + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v d\Omega}_{\|v\|_{H^1(\Omega)}^2} \Rightarrow a(.,.) \text{ es V-elíptica, con } \alpha = (C+1)^{-1}$$

$$|L(v)| = \int_{\Omega} f v d\Omega \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \Rightarrow L(.) \text{ es continua con } \lambda = \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

- Estimación de error: $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq (C+1) \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
- Estimación de estabilidad: $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (C+1) \|f\|_{L_2(\Omega)}$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 4: (D) $\frac{d^4 u}{dx^4} = f$ en $I=(0,1)$, $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1)$

- Definimos los espacios $H^2(I) = \{v : v, v', v'' \in L_2(I)\}$
 $H_0^2(I) = \{v : v \in H^2(I), v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$
 con norma $\|v\|_{H^2(I)} = \left\{ \int_I \left[v^2 + (v')^2 + (v'')^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}$

- La forma débil del problema (D) consiste en hallar $u \in V = H_0^2(I)$ tal que

$$\underbrace{\int_I u'' v'' dx}_{a(u, v)} = \underbrace{\int_I f v dx}_{L(v)} \quad \forall v \in H_0^2(I)$$

- $a(.,.)$ es una forma bilineal y simétrica
- $|a(v, w)| \leq \|v''\|_{L_2(I)} \|w''\|_{L_2(I)} \leq \|v\|_{H^2(I)} \|w\|_{H^2(I)} \Rightarrow a(.,.)$ es continua con $\gamma=1$
- $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^2(I)}^2 = \alpha \int_I \left[v^2 + (v')^2 + (v'')^2 \right] dx \Rightarrow a(.,.)$ es V-elíptica con $\alpha=1/3$
- $L(.)$ es continua con $\lambda = \|f\|_{L_2(I)}$
- Luego: $\|u\|_{H^2(I)} \leq 3 \|f\|_{L_2(I)} \quad \|u - u_h\|_{H^2(I)} \leq 3 \|u - v\|_{H^2(I)} \quad \forall v \in H_0^2(I)$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 5: Consideremos el problema bi-armónico:

$$(D) \quad \Delta^2 u = f \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3, \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad \left(\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) \right)$$

- Definimos el espacio $H^k(\Omega) = \{v : v \in L_2(\Omega), D^\alpha v \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq k\}$

$$\text{con norma } \|v\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 d\Omega}$$

$$\text{donde } D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2); |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots$$

- La forma débil del problema (D) resulta:

$$\text{Hallar } u \in H_0^2(\Omega) = \left\{ v : v \in H^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\}, \text{ tal que}$$

$$(V) \quad \underbrace{\int_{\Omega} f v d\Omega}_{=L(v)} = \int_{\Omega} \Delta^2 u v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}(\Delta u) v d\Gamma}_{=0} = \underbrace{\int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega}_{=a(u,v)} - \underbrace{\int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma}_{=0}$$

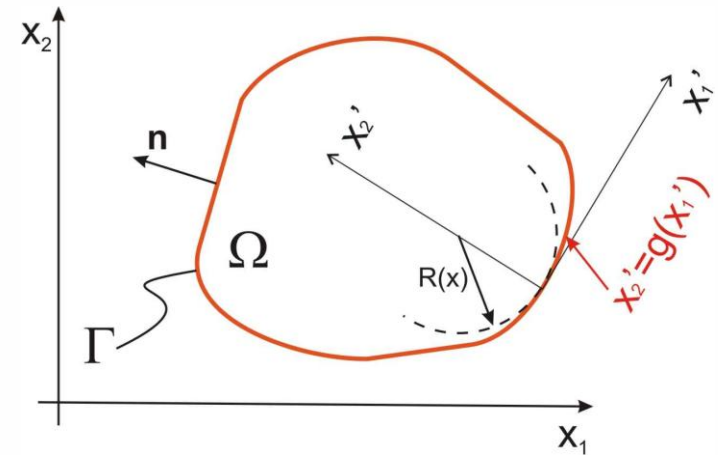
Ejemplos concretos (cont. Ejemplo 5)

Demostraremos la identidad :

$$\|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\Delta v)^2 d\Omega = \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 d\Gamma, \quad \forall v \text{ suave t.q. } v|_{\Gamma} = 0.$$

D) Aplicando Green

$$\begin{aligned} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (\Delta v)^2 d\Omega = \int_{\Omega} v_{,ii} v_{,jj} d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} v_{,i} v_{,jj} n_i d\Omega - \int_{\Omega} v_{,i} v_{,ijj} d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} (v_{,i} v_{,jj} n_i - v_{,i} v_{,ij} n_j) d\Omega + \int_{\Omega} v_{,ij} v_{,ij} d\Omega \end{aligned}$$



Cambiamos coordenadas en un punto del contorno. El borde, localmente, resulta $x_2^* = g(x_1^*)$ y como $v|_{\Gamma} = 0 \rightarrow v(x_1^*, g(x_1^*)) = 0$ en torno a $x_1^* = 0$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} v_{,1} + v_{,2} g' &= 0, \\ v_{,11} + 2v_{,12} g_{,1} + v_{,22} (g')^2 + v_{,2} g'' &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ en torno a } x_1^* = 0$$

Ejemplos concretos (cont. Ejemplo 5)

Al ser $g'(0) = 0$ y por definición: $g''(0) = 1/R$

$$v_{,1}(0,0) = 0,$$

$$v_{,11}(0,0) = -v_{,2}g'' = -\frac{v_{,2}}{R}$$

Por último, siendo $\mathbf{n} = (0 \ -1)^T$ en $\mathbf{x} = (0 \ 0)^T$

$$v_{,i}v_{,jj}n_i - v_{,i}v_{,ij}n_j = -v_{,2}v_{,jj} + v_{,i}v_{,i2} = -v_{,2}(v_{,11} + v_{,22}) + v_{,1}v_{,12} + v_{,2}v_{,22} = -v_{,2}v_{,11} = -\frac{(v_{,2})^2}{R}$$

con lo cual logramos

$$v_{,ij}v_{,ij} = v_{,11}v_{,11} + v_{,12}v_{,12} + v_{,21}v_{,21} + v_{,22}v_{,22} = \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha v)^2$$

$$\|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\Delta v)^2 d\Omega = \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 d\Gamma$$

(QED)

Ejemplos concretos (cont. Ejemplo 5)

- $a(.,.)$ es una forma bilineal simétrica, pues $a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, d\Omega = a(v, u)$
- $a(.,.)$ es continua con $\gamma=1$, pues $|a(u, v)| \leq \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{H^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{H^2(\Omega)}$
- $a(.,.)$ es V-elíptica con $\alpha=1/(1+C+C^2)$. Usamos la identidad :

$$\|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\Delta v)^2 \, d\Omega = \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (D^{\alpha} v)^2 \, d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 \, d\Gamma}_{=0}, \quad \forall v \text{ suave t.q. } v|_{\Gamma} = 0.$$

Luego añadimos los términos que faltan para lograr $\|v\|_{H^2(\Omega)}^2$:

$$\|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (D^{\alpha} v)^2 \, d\Omega + \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \equiv \|v\|_{H^2(\Omega)}^2$$

Usando Poincaré-Friedrichs :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 + (C+1)\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 + (C+1)C\|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2 = (1+C+C^2)\|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}^2$$

- $L(.)$ es continua con

$$\lambda = \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 6: Consideremos el problema estacionario de convección-difusión:

$$(D) \quad -\mu\Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u = f \text{ en } \Omega, \mu \in \mathbb{R}^+, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

Supongamos $\|\boldsymbol{\beta}\|/\mu$ moderado.

- La forma débil del problema (D) se obtiene haciendo

$$(V) \quad \underbrace{\int_{\Omega} f v d\Omega}_{=L(v)} = \int_{\Omega} (-\mu\Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u) v d\Omega = \underbrace{\int_{\Omega} [\mu \nabla u \cdot \nabla v + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u) v] d\Omega}_{=a(u,v)} + \overbrace{\int_{\Gamma} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma}^{=0}$$

- $L(\cdot)$ es una forma lineal continua.
- $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, continua y V-elíptica, pero **no simétrica**.

Teorema: si $L(\cdot)$ es una forma lineal continua, y $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, continua y V-elíptica, pero **no simétrica**, se puede demostrar que hay solución única a (V), y está acotada. Sin embargo, en este caso no existe problema de minimización asociado a (V).

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 7: Consideremos el problema estacionario de conducción de calor en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{l}
 \text{(D)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 -\nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega, \text{ con } \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}, k_i \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Ecuación del calor} \\
 u = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad \text{CB Dirichlet} \\
 \mathbf{k} \nabla u \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{en } \Gamma_2 \quad \text{CB Neumann}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Definimos como espacio para la solución $V = \{v : v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$

- La forma débil del problema (D) se obtiene haciendo

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f v \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{k} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{k} \nabla u \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{k} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} g v \, d\Gamma \\
 &\Rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{k} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} g v \, d\Gamma}_{L(v)}
 \end{aligned}$$

- $L(\cdot)$ es una forma lineal continua si $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Gamma_2)$.
- $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, simétrica, continua y V-elíptica si

$$\exists c, C \in \mathbb{R}^+ / c \leq k_i(\mathbf{x}) \leq C \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$