

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 3

Algunos espacios de elementos finitos

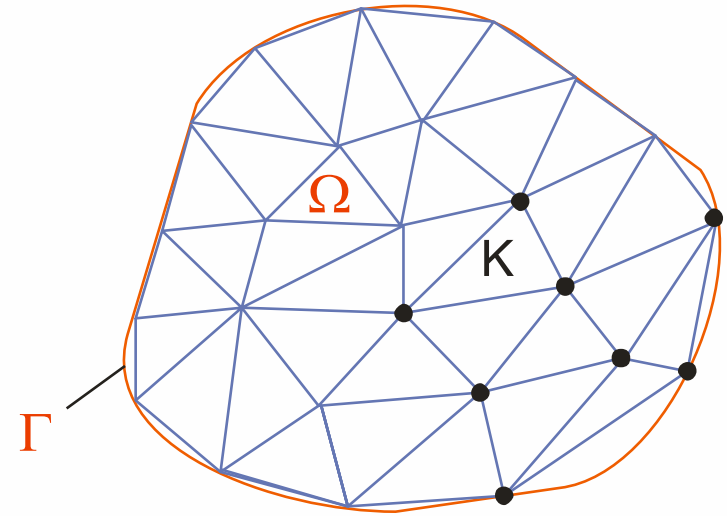
Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

Cimec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

26-Nov-2019

Algunos espacios de elementos finitos

- Sea el dominio acotado Ω representado por la “triangulación” (o malla) de elementos finitos $T_h = \{K\}$.
 - En 1D, el elemento K es un intervalo.
 - En 2D, los elementos más comunes son triángulos o cuadriláteros.
 - En 3D, tetraedros o hexaedros.
- Los espacios V_h más comunes en elementos finitos consisten en funciones polinómicas por tramos definidas sobre la malla T_h .
- La definición de un espacio de elementos finitos V_h requiere especificar
 - La malla T_h del dominio Ω .
 - La naturaleza de las funciones $v \in V_h$ sobre cada elemento K (ej., lineal, cuadrática, cúbica, etc.)
 - Los parámetros usados para definir dichas funciones.



Requisitos de regularidad

- BVP de 2° orden $\Rightarrow V_h \subset H^1(\Omega)$
- BVP de 4° orden $\Rightarrow V_h \subset H^2(\Omega)$
- Si los espacios consisten de funciones polinómicas, resulta

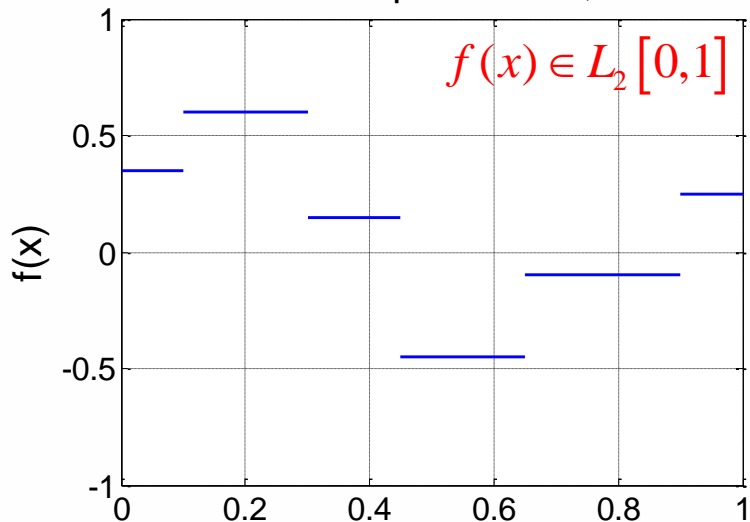
$$V_h \subset H^1(\Omega) \Leftrightarrow V_h \subset C^0(\bar{\Omega}) = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ o sea, } v \text{ es continua en } \bar{\Omega} \right\}$$

$$(\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma)$$

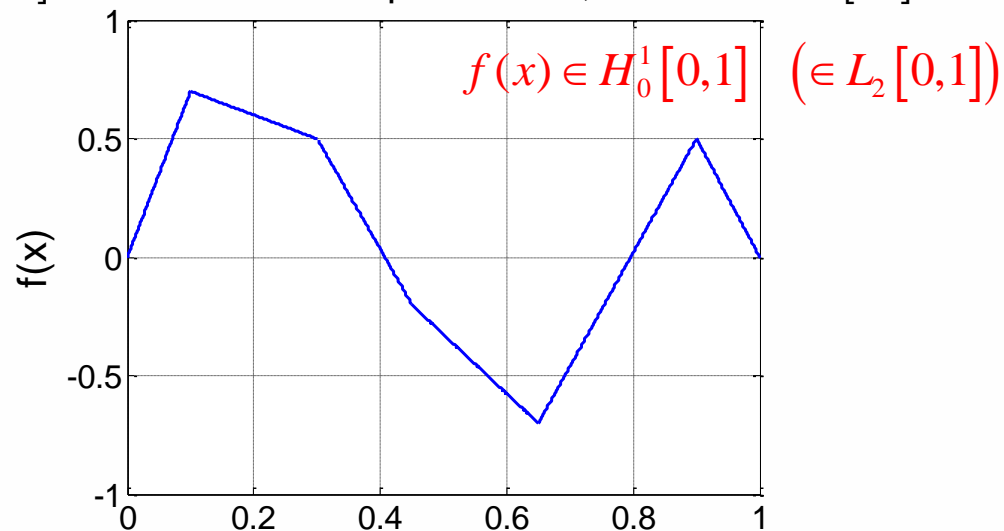
$$V_h \subset H^2(\Omega) \Leftrightarrow V_h \subset C^1(\bar{\Omega}) = \left\{ v : v \in C^1(\bar{\Omega}), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in C^0(\bar{\Omega}), i = 1, \dots, d \right\}$$

Ejemplos funciones polinomiales a trozos

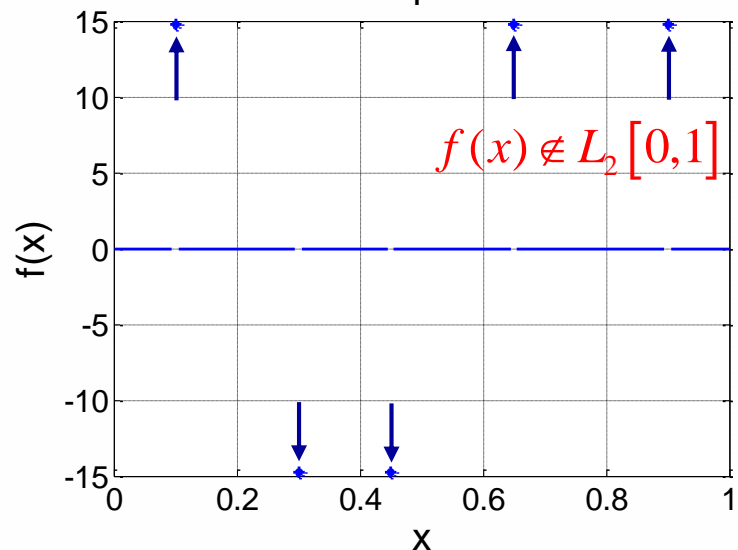
Funcion constante por tramos, discontinua $\notin C^0[0,1]$



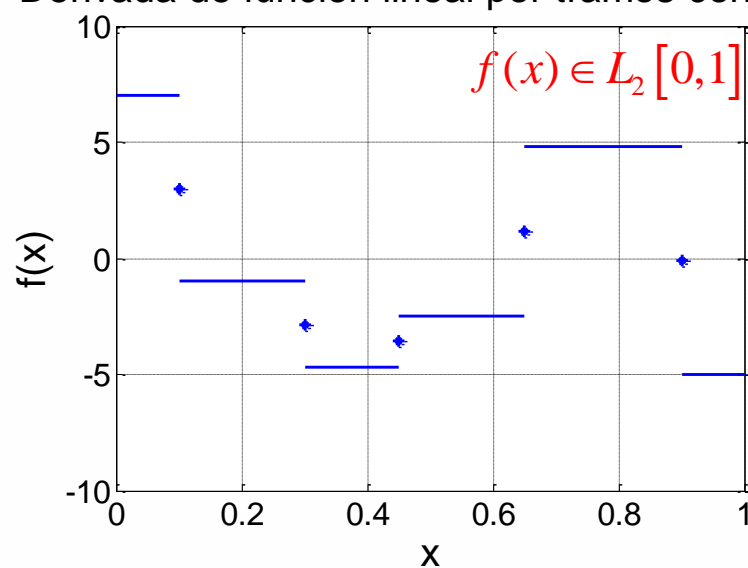
Funcion lineal por tramos, continua $\in C^0[0,1]$



Derivada de func.cte. por tramos discontinua

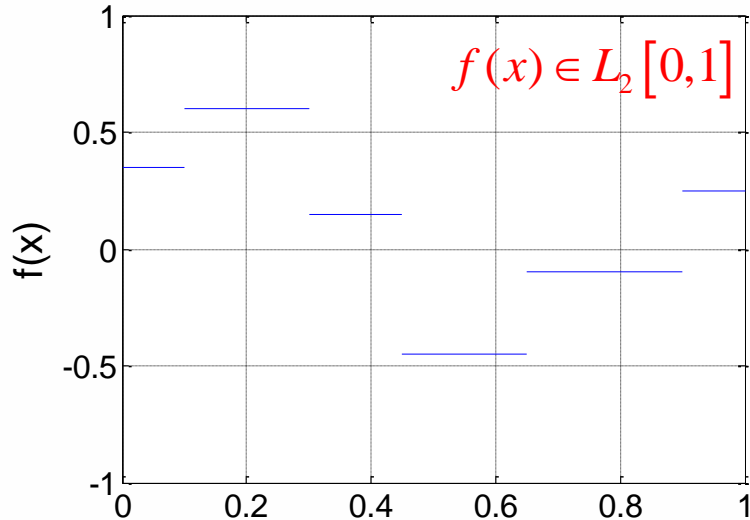


Derivada de funcion lineal por tramos continua

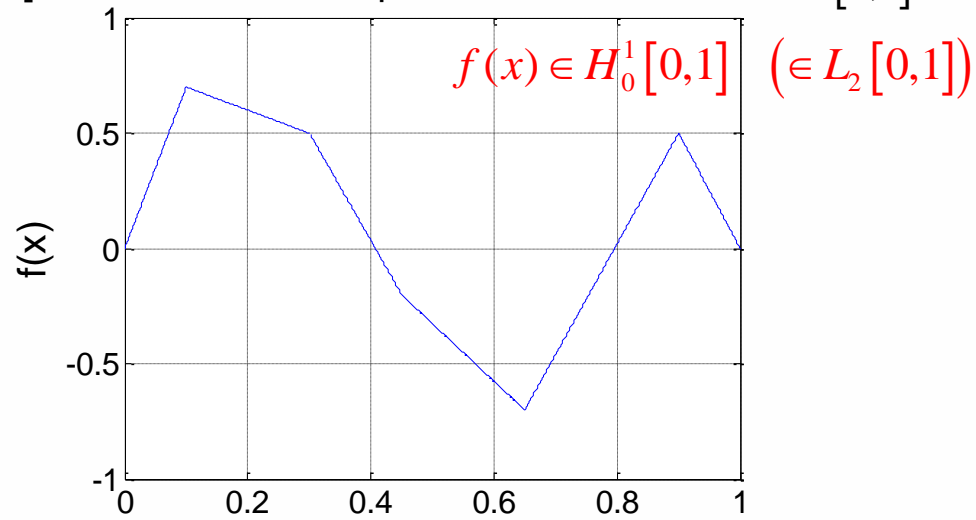


Ejemplos funciones polinomiales a trozos

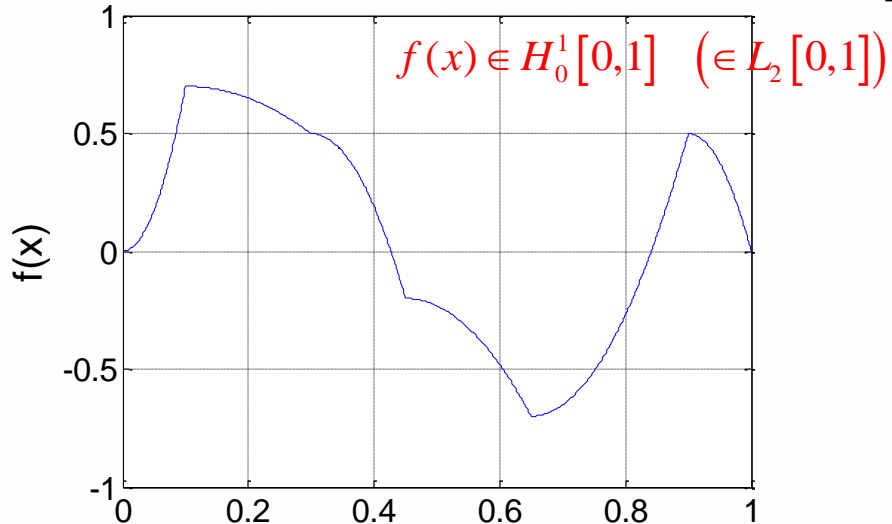
Funcion constante por tramos, discontinua $\notin C^0[0,1]$



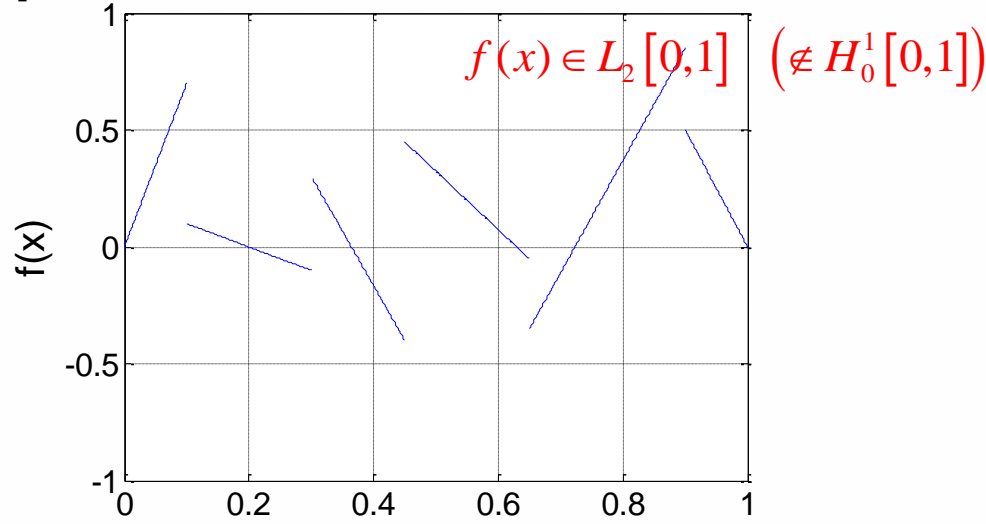
Funcion lineal por tramos, continua $\in C^0[0,1]$



Funcion cuadratica por tramos, continua $\in C^0[0,1]$



Funcion lineal por tramos, discontinua $\notin C^0[0,1]$



Algunos ejemplos de elementos finitos en 2D

- Sea el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ .
- Sea $T_h = \{K\}$ una triangulación de Ω en triángulos K .
- Definimos los espacios

$$P_r(K) = \{v : v \text{ es un polinomio de grado } \leq r \text{ en } K\}$$

- $P_1(K)$ es el espacio de funciones lineales en K :

$$v(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y, \quad \forall (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

luego $\{1, x, y\}$ es una base en $P_1(K)$ y $\dim P_1(K) = 3$.

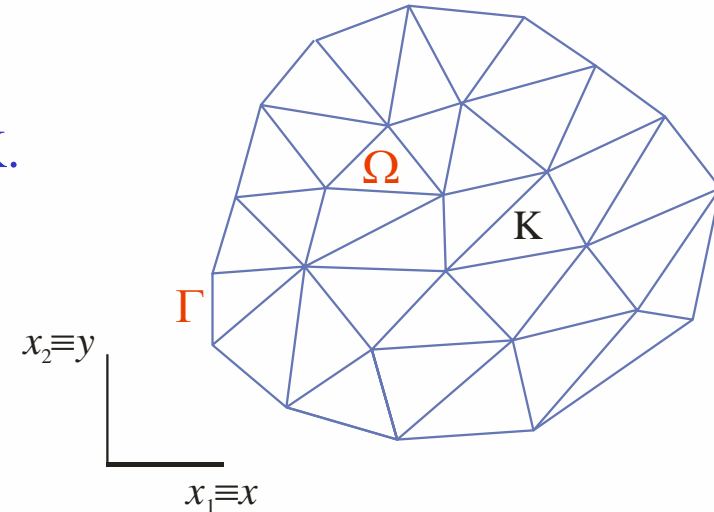
- $P_2(K)$ es el espacio de funciones cuadráticas en K :

$$v(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad \forall (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

luego $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ es una base en $P_2(K)$ y $\dim P_2(K) = 6$.

- En general: $P_r(K) = \left\{ v : v(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq r} a_{ij} x^i y^j, \forall (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

$$\dim P_r(K) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$



Elemento finito triangular lineal

- Sea el espacio de funciones lineales a trozos:

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h \right\}$$

- Los parámetros necesarios para describir las funciones $v \in V_h$ se denominan grados de libertad (gdl) globales, y se eligen coincidentes con los valores de v en los nodos de la triangulación T_h .
- Si $K \in T_h$ es un **triángulo lineal** de vértices (x_i, y_i) , $i=1,2,3$, los gdl elementales son los valores de v en los dichos vértices.

Elemento finito triangular lineal (cont)

- **Teorema:** Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices (x_i, y_i) , $i=1,2,3$. Una función $v \in P_1(K)$ está determinada de manera única por los gdl elementales, i.e., dados los valores α_i ,

$$\exists! v \in P_1(K) / v(x_i, y_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3$$

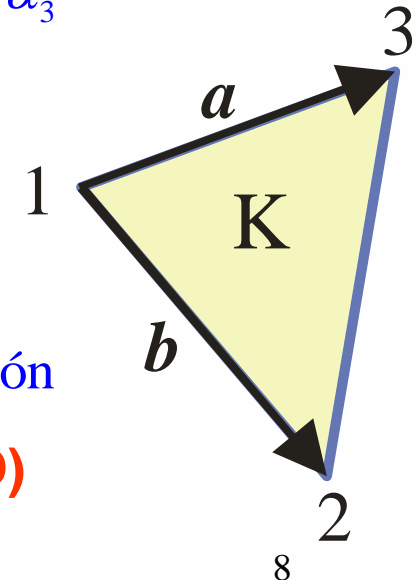
Demo.: $v \in P_1(K) \Rightarrow v(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y, \quad \forall (x, y) \in K, c_i \in \mathbb{R}$

Evaluando en los vértices \longrightarrow
$$\begin{cases} v(x_1, y_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1 = \alpha_1 \\ v(x_2, y_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2 = \alpha_2 \\ v(x_3, y_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3 = \alpha_3 \end{cases} \quad \text{ec (3.7)}$$

\exists !solución para α_i dados si $\det B = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0$

$\det B = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 2 \text{ area } K \neq 0 \Rightarrow B \text{ es no singular} \Rightarrow \exists$!solución

(QED)



Elemento finito triangular lineal (cont)

Demo. 2:

Notar que $\dim P_1(K) = \# \text{ gdl}$, i.e., $\# \text{ incógn} = \# \text{ ecs}$.

Sean $v \in P_1(K)$ y $w \in P_1(K)$, $v \neq w$ / $v(x_i, y_i) = w(x_i, y_i) = \alpha_i$ para $i=1,2,3$.

Sea $u = v - w \in P_1(K)$. Luego, $u(x_i, y_i) = 0$ para $i=1,2,3$.

Ahora bien, si $u(x_i, y_i) = 0$ para $i=1,2,3$ implica que $u \equiv 0$, luego $v = w$ contradiciendo la hipótesis y la función v es única.

(QED)

Esta forma de verificar la unicidad evita calcular $\det B$, tarea que se complica a medida que se usan polinomios de mayor orden.

Determinación de las funciones de base para el triángulo lineal

Toda función $v \in P_1(K)$ puede representarse $v(x, y) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y)v(x_i, y_i), \quad \forall (x, y) \in K.$

Las funciones de base λ_i (\equiv coord de área del triángulo K) verifican

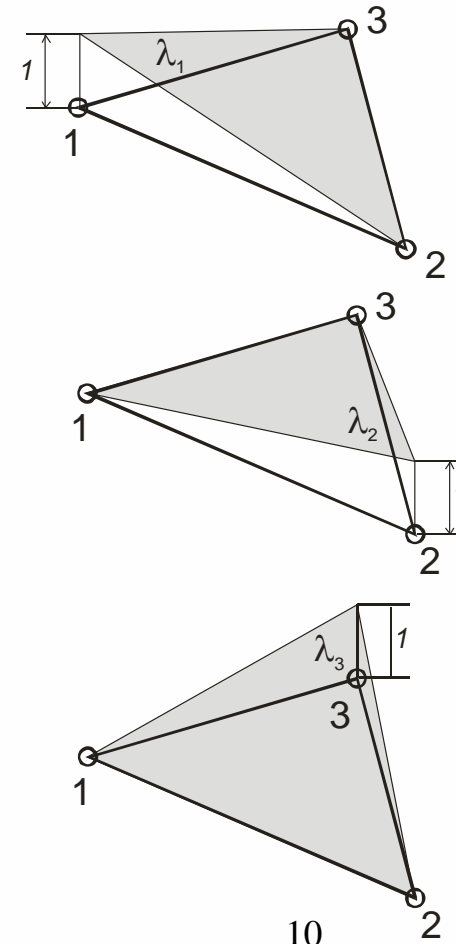
$$\lambda_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y / \lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

lo que da lugar al sist de ecs
$$\begin{cases} \lambda_1(x_1, y_1) = a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = 1 \\ \lambda_1(x_2, y_2) = a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ \lambda_1(x_3, y_3) = a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3 = 0 \end{cases}$$

de donde

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2 \text{ area } K} \quad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{y_2 - y_3}{2 \text{ area } K} \quad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3 - x_2}{2 \text{ area } K}$$

Análogamente: $a_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2 \text{ area } K} \quad b_2 = \frac{y_3 - y_1}{2 \text{ area } K} \quad c_2 = \frac{x_1 - x_3}{2 \text{ area } K}$
 $a_2 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2 \text{ area } K} \quad b_3 = \frac{y_1 - y_2}{2 \text{ area } K} \quad c_3 = \frac{x_2 - x_1}{2 \text{ area } K}$



Notar:

$\{1, x, y\}$: base canónica de polinomios $P_1(\mathbf{K})$.

$\{\lambda_i(\mathbf{x})\}$: base de elementos finitos triangulares lineales con polinomios $P_1(\mathbf{K})$.

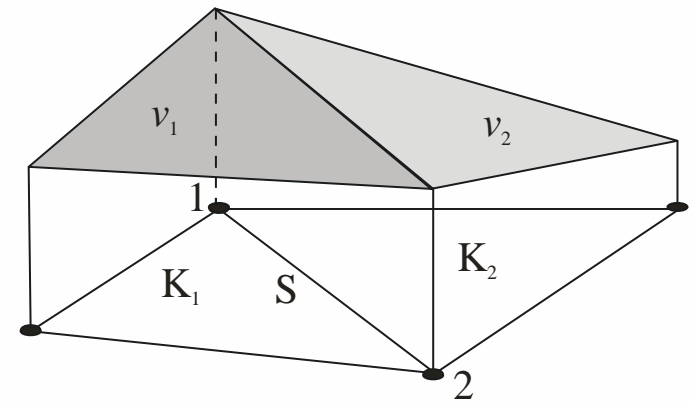
Continuidad entre elementos triangulares lineales

- Dado $V_h = \{v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h\}$ ec (3.3)
- Adoptando como gdl los nodos de la malla T_h , podemos definir alternativamente

$$V_h = \{v : v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h, \text{ y } v \text{ es continua en los nodos}\} \quad \text{ec (3.11)}$$

- **Demo.:** Para probar que (3.11) \equiv (3.4), es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a (3.11) es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
 - Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S y los nodos 1 y 2.
 - Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_1(K_i)$ la restricción de v a K_i .
 - $v_1 = v_2$ en los nodos 1 y 2, y v_1, v_2 lineales. $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S
 $\Rightarrow v$ es continua a través de S

 $\Rightarrow v \in C^0(\bar{\Omega}) \quad \text{(QED)}$

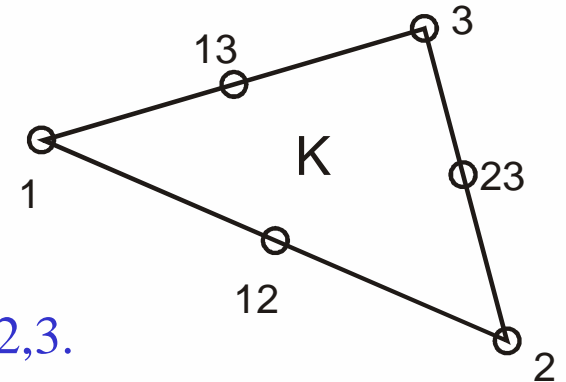


Elemento finito triangular cuadrático

- Sea el espacio de funciones cuadráticas a trozos:

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_2(K), \forall K \in T_h \right\}$$

- Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, $i=1,2,3$, y sea $\mathbf{x}_{ij} = (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ el punto medio del lado ij , $i < j$, $i, j=1,2,3$.



- Teorema:** toda función $v \in P_2(K)$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$v(\mathbf{x}_{ij}), \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Elemento finito triangular cuadrático (cont)

- **Demo.:** como $\dim P_2(\mathbb{K}) = \# \text{gdl} = 6$, es suficiente probar que si $v \in P_2(\mathbb{K})$ y $v(\mathbf{x}_i) = v(\mathbf{x}_{ij}) = 0$ (con $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$), entonces debe ser $v \equiv 0$.

1. A lo largo del lado 23, v varía cuadráticamente y $v=0$ en \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}_3 y \mathbf{x}_{23} .
Luego, $v=0 \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{23}$, y v puede escribirse

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})w_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}, \quad w_1 \in P_1(\mathbb{K}), \quad \lambda_1 \text{ función de base en } P_1(\mathbb{K}).$$

2. Ídem a lo largo del lado 13, luego

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})w_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{K}, \quad w_0 \text{ cte}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ funciones de base en } P_1(\mathbb{K}).$$

3. Evaluando en \mathbf{x}_{12}

$$v(\mathbf{x}_{12}) = \lambda_1(\mathbf{x}_{12})\lambda_2(\mathbf{x}_{12})w_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \Rightarrow v = 0 \quad \text{(QED)}$$

Elemento finito triangular cuadrático (cont)

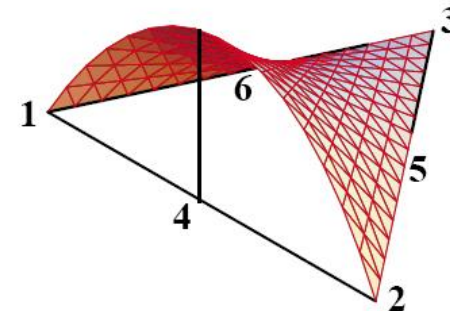
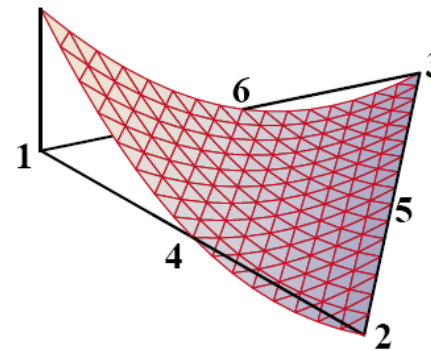
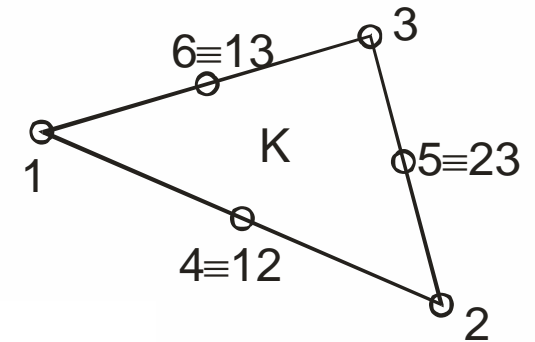
Toda función $v \in P_2(K)$ puede expresarse

$$v = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (2\lambda_i - 1) v(\mathbf{x}_i) + \sum_{i,j=1, i < j}^3 4\lambda_i \lambda_j v(\mathbf{x}_{ij}) = \sum_{i=1}^6 \Psi_i v(\mathbf{x}_i)$$

Con las funciones de base en $P_2(K)$ dadas por

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \lambda_1 (2\lambda_1 - 1) \\ \psi_2 &= \lambda_2 (2\lambda_2 - 1) \\ \psi_3 &= \lambda_3 (2\lambda_3 - 1) \end{aligned} \right\} \text{funciones asociadas a los nodos en vértices}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_4 &= 4\lambda_1 \lambda_2 \\ \psi_5 &= 4\lambda_2 \lambda_3 \\ \psi_6 &= 4\lambda_1 \lambda_3 \end{aligned} \right\} \text{funciones asociadas a los nodos en el medio de los lados}$$



Es fácil verificar que $\psi_i, i=1, \dots, 6$, conforman una base en $P_2(K)$ (seis funciones cuadráticas LI) y además $\psi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$.

Continuidad entre elementos triangulares cuadráticos

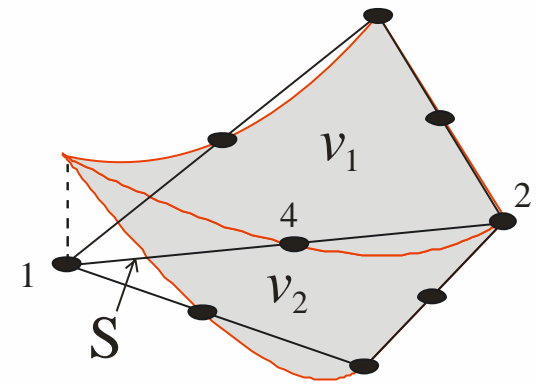
- Dado $V_h = \{v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_2(K), \forall K \in T_h\}$ **ec (a)**

o, alternativamente,

$$V_h = \{v : v|_K \in P_2(K), \forall K \in T_h, \text{ y } v \text{ es continua en los nodos}\} \quad \text{ec (b)}$$

- **Demo.:** Para probar que **(a)≡(b)**, es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a **(b)** es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
 - Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que compartan el lado S , con nodos 1, 2 y 4.
 - Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_2(K_i)$ la restricción de v a K_i .
 - $v_1 = v_2$ en los nodos 1, 2 y 4, y v_1, v_2 cuadráticas. $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S
 $\Rightarrow v$ es continua a través de S

 $\Rightarrow v \in C^0(\bar{\Omega})$ **(QED)**



Elemento finito triangular cúbico

- Sea el espacio de funciones cúbicas a trozos:

$$V_h = \{v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_3(K), \forall K \in T_h\}$$

- Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, $i=1,2,3$, y

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{2}{3}\mathbf{x}_i + \frac{1}{3}\mathbf{x}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j$$

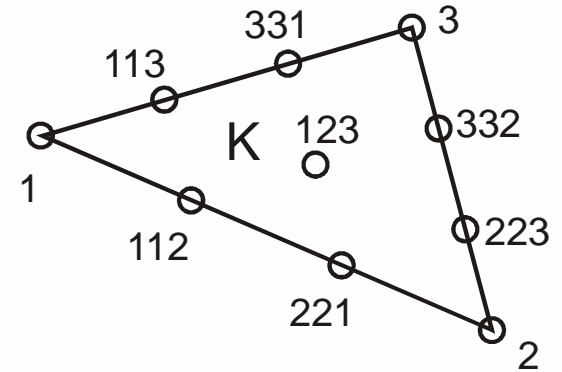
$$\mathbf{x}_{123} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$$

- Teorema:** toda función $v \in P_3(K)$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$v(\mathbf{x}_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j$$

$$v(\mathbf{x}_{123})$$



Elemento finito triangular cúbico (cont)

- **Demo.:** como $\dim P_3(K) = \#gdl = 10$, es suficiente probar que si $v \in P_3(K)$ y $v(\mathbf{x}_i) = v(\mathbf{x}_{ij}) = v(\mathbf{x}_{123}) = 0$ (con $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$), entonces debe ser $v \equiv 0$.

1. v tiene variación cúbica a lo largo de los lados 12, 23 y 13, y $v=0$ en cuatro puntos de cada lado, luego $v=0$ en los tres lados y puede escribirse

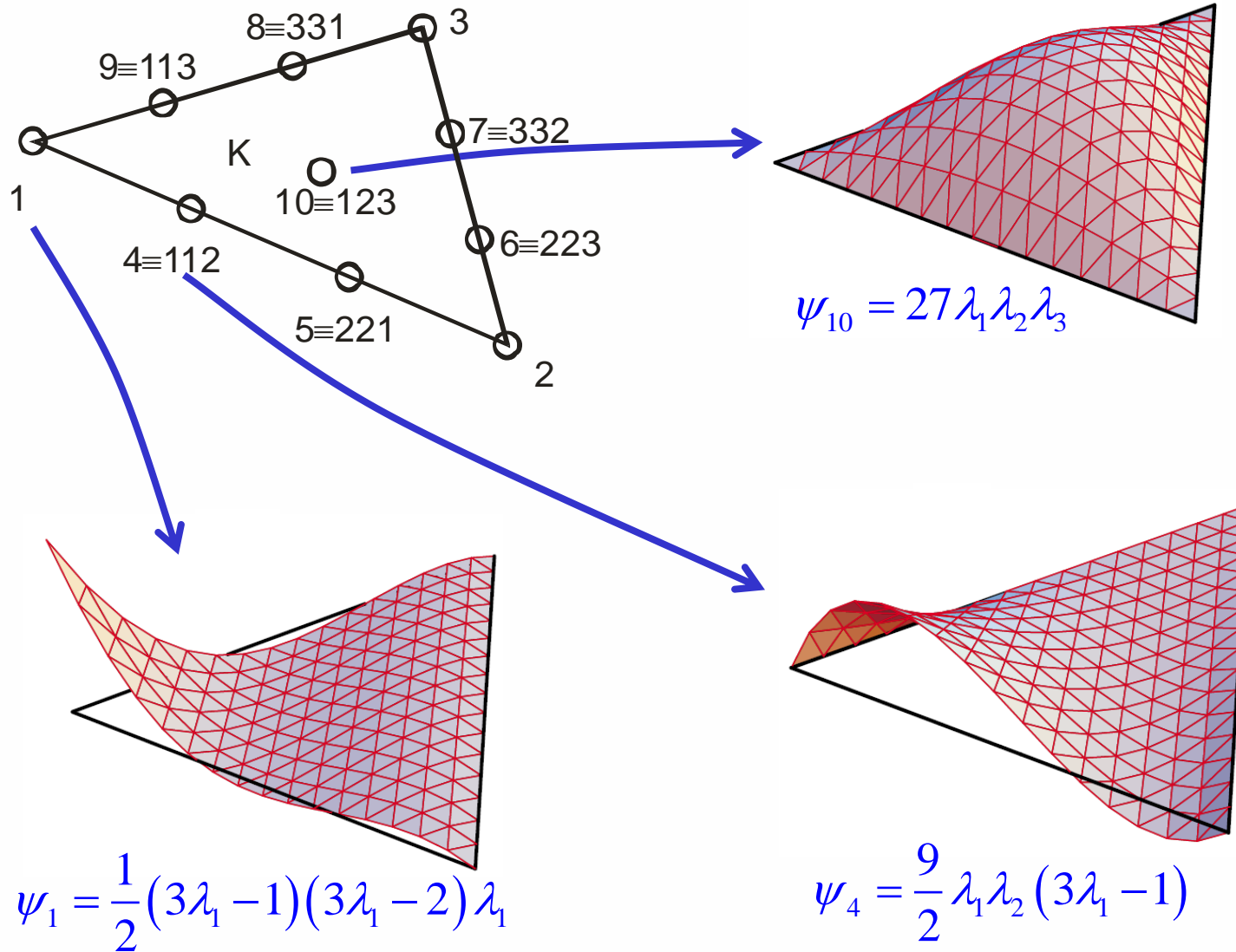
$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x})w_0, \quad \forall \mathbf{x} \in K, \quad w_0 \text{ cte, } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ bases en } P_1(K).$$

2. Evaluando en \mathbf{x}_{123}

$$v(\mathbf{x}_{123}) = \lambda_1(\mathbf{x}_{123})\lambda_2(\mathbf{x}_{123})\lambda_3(\mathbf{x}_{123})w_0 = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \Rightarrow v = 0$$

(QED)

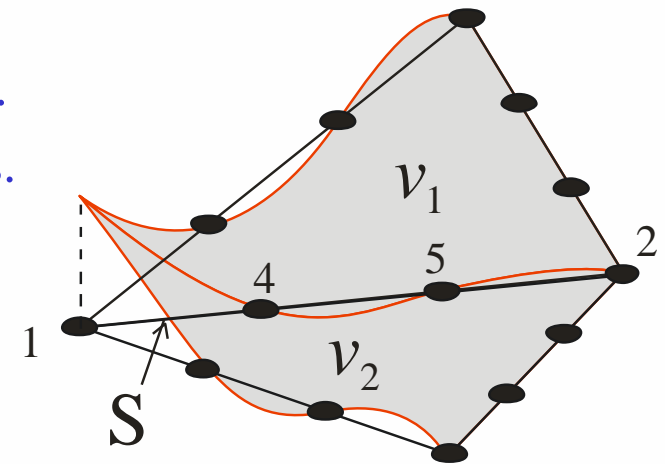
Funciones de base para elemento finito triangular cúbico



Continuidad entre elementos triangulares cúbicos

- Dado $V_h = \{v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_3(K), \forall K \in T_h\}$ **ec (a)**
- Adoptando como gdl los nodos de la malla T_h , podemos definir alternativamente

$$V_h = \{v : v|_K \in P_3(K), \forall K \in T_h, \text{ y } v \text{ es continua en los nodos}\} \quad \text{ec (b)}$$
- **Demo.:** Para probar que **(a) \equiv (b)**, es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a **(b)** es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
 - Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S , de nodos extremos 1 y 2, y nodos intermedios 4 y 5.
 - Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_3(K_i)$ la restricción de v a K_i .
 - $v_1 = v_2$ en los nodos 1, 2, 4 y 5, y v_1, v_2 cúbicas.
 - $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S
 - $\Rightarrow v$ es continua a través de S
 - $\Rightarrow v \in C^0(\bar{\Omega})$ **(QED)**



Coordenadas de área para triángulos

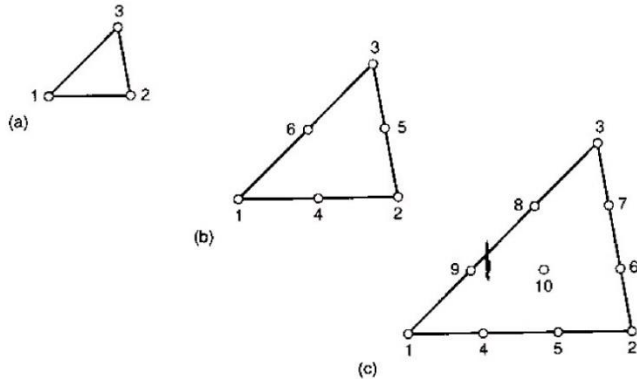


Fig. 8.15 Triangular element family: (a) linear, (b) quadratic, and (c) cubic.

8.8.1 Area coordinates

While cartesian directions parallel to the sides of a rectangle were a natural choice for that shape, in the triangle these are not convenient.

A new set of coordinates, L_1 , L_2 , and L_3 for a triangle 1, 2, 3 (Fig. 8.16), is defined by the following linear relation between these and the cartesian system:

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (8.30)$$

To every set, L_1 , L_2 , L_3 (which are not independent, but are related by the third equation), there corresponds a unique set of cartesian coordinates. At point 1, $L_1 = 1$ and $L_2 = L_3 = 0$, etc. A linear relation between the new and cartesian coordinates implies

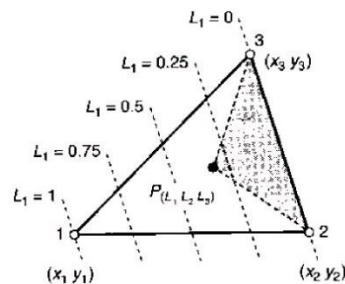


Fig. 8.16 Area coordinates.

that contours of L_1 are equally placed straight lines parallel to side 2-3 on which $L_1 = 0$, etc.

Indeed it is easy to see that an alternative definition of the coordinate L_1 of a point P is by a ratio of the area of the shaded triangle to that of the total triangle:

$$L_1 = \frac{\text{area } P23}{\text{area } 123} \quad (8.31)$$

Hence the name *area coordinates*.

Solving Eq. (8.30) gives

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \\ L_2 &= \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta} \\ L_3 &= \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta} \end{aligned} \quad (8.32)$$

in which

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{area } 123 \quad (8.33)$$

and

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

etc., with cyclic rotation of indices 1, 2, and 3.

The identity of expressions with those derived in Chapter 4 [Eqs (4.5b) and (4.5c)] is worth noting.

8.8.2 Shape functions

For the first element of the series [Fig. 8.15(a)], the shape functions are simply the area coordinates. Thus

$$N_1 = L_1 \quad N_2 = L_2 \quad N_3 = L_3 \quad (8.34)$$

This is obvious as each individually gives unity at one node, zero at others, and varies linearly everywhere.

To derive shape functions for other elements a simple recurrence relation can be derived.³ However, it is very simple to write an arbitrary triangle of order M in a manner similar to that used for the lagrangian element of Sec. 8.5.

Denoting a typical node i by three numbers I , J , and K corresponding to the position of coordinates L_{1i} , L_{2i} , and L_{3i} we can write the shape function in terms of three lagrangian interpolations as [see Eq. (8.18)]

$$N_i = I_i^I(L_1) I_j^J(L_2) I_k^K(L_3) \quad (8.35)$$

In the above I_i^I , etc., are given by expression (8.18), with L_1 taking the place of ξ , etc.



Coordenadas de área para triángulos

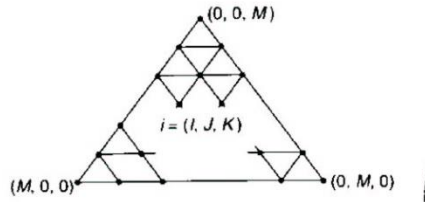


Fig. 8.17 A general triangular element.

It is easy to verify that the above expression gives

$$N_i = 1 \quad \text{at} \quad L_1 = L_{1i}, \quad L_2 = L_{2i}, \quad L_3 = L_{3i}$$

and zero at all other nodes.

The highest term occurring in the expansion is

$$L_1^I L_2^J L_3^K$$

and as

$$I + J + K = M$$

for all points the polynomial is also of order M .

Expression (8.35) is valid for quite arbitrary distributions of nodes of the pattern given in Fig. 8.17 and simplifies if the spacing of the nodal lines is equal (i.e., $1/m$). The formula was first obtained by Argyris *et al.*¹¹ and formalized in a different manner by others.^{7,12}

The reader can verify the shape functions for the second- and third-order elements as given below and indeed derive ones of any higher order easily.

Quadratic triangle [Fig. 8.15(b)]

Corner nodes:

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \quad \text{etc.}$$

Mid-side nodes:

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad \text{etc.}$$

Cubic triangle [Fig. 8.15(c)]

Corner nodes:

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1, \quad \text{etc.} \quad (8.36)$$

Mid-side nodes:

$$N_4 = \frac{2}{3}L_1L_2(3L_1 - 1), \quad \text{etc.} \quad (8.37)$$

and for the internal node:

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3$$

The last shape again is a 'bubble' function giving zero contribution along boundaries - and this will be found to be useful in many other contexts (see the mixed forms in Chapter 12).

The quadratic triangle was first derived by Veubeke¹³ and used later in the context of plane stress analysis by Argyris.¹⁴

When element matrices have to be evaluated it will follow that we are faced with integration of quantities defined in terms of area coordinates over the triangular region. It is useful to note in this context the following exact integration expression:

$$\iint_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2\Delta \quad (8.38)$$

Para los términos sobre el lado i/j puede usarse:

$$\int_{\ell^{(e)}} L_i^k L_j^m ds = \ell^{(e)} \frac{k! m!}{(1 + k + m)!}$$

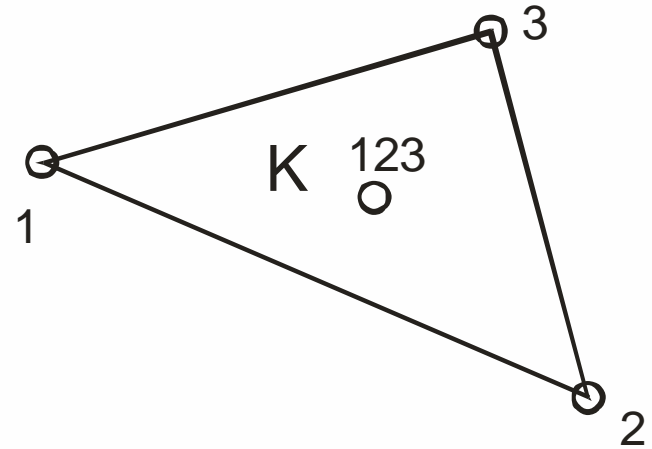


Elemento finito triangular cúbico con gdl en derivadas

- Sea el espacio de funciones cúbicas a trozos:

$$V_h = \left\{ v : v|_K \in P_3(K), \forall K \in T_h \right\}$$

- Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, $i=1,2,3$, y centro de gravedad \mathbf{x}_{123} .



- Teorema:** toda función $v \in P_3(K)$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}_i), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$v(\mathbf{x}_{123})$$

Elemento finito triangular cúbico con gdl en derivadas (cont)

- **Demo.:** como $\dim P_3(\mathbf{K}) = \#\text{gdl} = 10$, es suficiente probar que si $v \in P_3(\mathbf{K})$ y

$$v(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{x}_i) = v(\mathbf{x}_{123}) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

entonces debe ser $v \equiv 0$. Veremos que:

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x})w_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}, \quad w_0 \text{ cte}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ bases en } P_1(\mathbf{K}).$$

1. la función v tiene variación cúbica a lo largo del lado 12, y se anula así como su derivada en dos puntos del lado, luego $v=0$ en todos los puntos del lado 12.
2. Razonando análogamente con los lados 23 y 13, llegamos a

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x})w_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}, \quad w_0 \text{ cte}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ bases en } P_1(\mathbf{K}).$$

3. Evaluando en \mathbf{x}_{123}

$$v(\mathbf{x}_{123}) = \lambda_1(\mathbf{x}_{123})\lambda_2(\mathbf{x}_{123})\lambda_3(\mathbf{x}_{123})w_0 = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \Rightarrow v = 0$$

(QED)

Continuidad entre EF triangulares cúbicos con gdl en derivadas

- Dado $V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_3(K), \forall K \in T_h \right\}$ **ec (a)**
- Adoptando como gdl los nodos de la malla T_h , podemos definir alternativamente $V_h = \left\{ v : v|_K \in P_3(K), \forall K \in T_h, \text{ y } v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ continuas en los nodos} \right\}$ **ec (b)**
- **Demo.:** Para probar que **(a) \equiv (b)**, es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a **(b)** es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
 - Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S , de nodos 1 y 2.
 - Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_3(K_i)$ la restricción de v a K_i .
 - $v_1 = v_2$ y $\frac{\partial v_1}{\partial s} = \frac{\partial v_2}{\partial s}$ (derivadas en la dirección s a lo largo de S)
en los nodos 1 y 2, y v_1, v_2 cúbicas $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S
 $\Rightarrow v$ es continua a través de $S \Rightarrow v \in C^0(\bar{\Omega})$ **(QED)**
- **Nota:** no se logra continuidad C^1 por cuanto la función de base asociada a x_{123} no llega con pendiente nula a los lados.

Elemento finito triangular C^1 -continuo

- Consideremos un espacio de EF $V_h \subset C^1(\bar{\Omega})$, lo que requiere usar polinomios de grado 5 por triángulo, i.e.

$$V_h = \left\{ v : v \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_5(K), \forall K \in T_h \right\}$$

- Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, $i=1,2,3$, y sea $\mathbf{x}_{ij} = (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ el punto medio del lado ij , $i < j$, $i, j=1,2,3$.

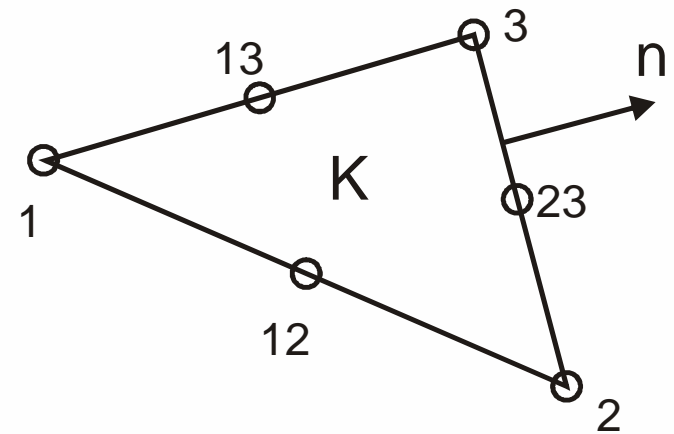
- Teorema:** toda función $v \in P_5(K)$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}_i), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

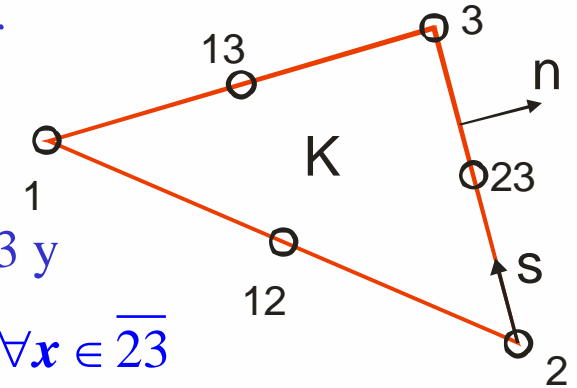
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\mathbf{x}_i), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_i), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{x}_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, i < j$$



Elemento finito triangular C^1 -continuo (cont)

- Demo.:** como $\dim P_5(K) = \#gdl = 21$, es suficiente probar que si todos los gdl son nulos, entonces debe ser $v \equiv 0$.



- v es un polinomio de grado ≤ 5 a lo largo del lado 23 y

$$v(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial v}{\partial s}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 2, 3 \Rightarrow v = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{23}$$

- $\frac{\partial v}{\partial n}$ es un polinomio de grado ≤ 4 a lo largo del lado 23 y

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{x}_{23}) = \frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) (\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 2, 3 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{23}$$

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{23} \Rightarrow v(\mathbf{x}) = [\lambda_1(\mathbf{x})]^2 p_3(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in K, p_3 \in P_3(K)$$

- Aplicando idéntico razonamiento sobre los lados 12 y 13, llegamos a

$$v(\mathbf{x}) = w_0 [\lambda_1(\mathbf{x})]^2 [\lambda_2(\mathbf{x})]^2 [\lambda_3(\mathbf{x})]^2, \quad \forall \mathbf{x} \in K, w_0 \text{ cte}$$

$$v \in P_5(K) \Leftrightarrow w_0 = 0 \Rightarrow v(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \forall \mathbf{x} \in K \quad \textbf{(QED)}$$

Continuidad entre EF triangulares C^1 -continuos

- Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que compartan el lado S , de extremos 2, 3.
- Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_5(K_i)$ la restricción de v a K_i , y $w = v_1 - v_2$ sobre S .

$$\left. \begin{aligned}
 w(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial w}{\partial s}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 2, 3 &\Rightarrow w = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S \\
 &\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S \\
 \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{x}_{23}) = \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 2, 3 &\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v \in C^1(\bar{\Omega})$$

(QED)

- Luego: $V_h = \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_5(K), \forall K \in T_h \right\}$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l}
 v : v|_K \in P_5(K), \quad \forall K \in T_h, \\
 v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ continuas en los nodos vértices} \\
 \frac{\partial v}{\partial n} \text{ continua en los nodos medios de los lados}
 \end{array} \right\}$$

Elemento finito tetraédrico lineal

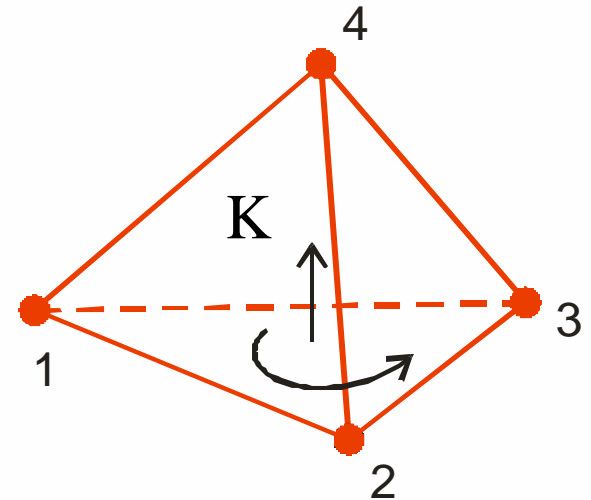
- Sea Ω la unión de un conjunto $T_h = \{K\}$ de tetraedros no superpuestos K tales que ningún vértice de algún tetraedro se ubique sobre el lado de otro tetraedro.

- Adoptamos los siguientes espacios polinómicos por trozos de EF

$$V_h = \left\{ v : v \in P_r(K), \forall K \in T_h, \text{ i.e., } v = \sum_{i+j+m \leq r} a_{ijm} x^i y^j z^m, \forall (x, y, z) \in K, a_{ijm} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Para $r=1$, toda función $v \in P_1(K)$ está únicamente determinada por sus valores en los vértices de K .
- En este caso, el espacio de EF es

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v \in P_1(K), \forall K \in T_h \right\}$$



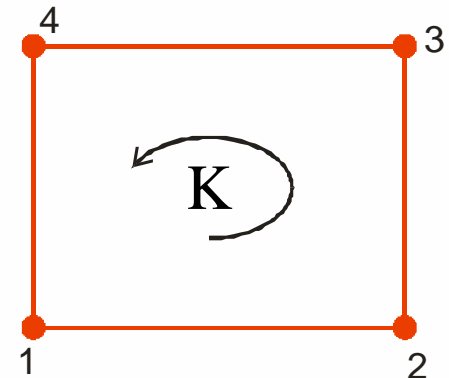
Elemento finito rectangular bilineal

- Sea Ω la unión de un conjunto $T_h = \{K\}$ de rectángulos no superpuestos K tales que ningún vértice de algún rectángulo se ubique sobre el lado de otro rectángulo.
- Definimos el espacio

$$Q_1(K) = \left\{ v : v \text{ es bilineal en } K, \text{ i.e., } v(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy, \forall (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Toda función $v \in Q_1(K)$ está únicamente determinada por sus valores en los vértices del rectángulo K .
- Se puede demostrar fácilmente que existe continuidad interelementos de v .
- Luego, el espacio de EF es

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v \in Q_1(K), \forall K \in T_h \right\}$$



Elemento finito rectangular bicuadrático

- Definimos el espacio de funciones bicuadráticas en K

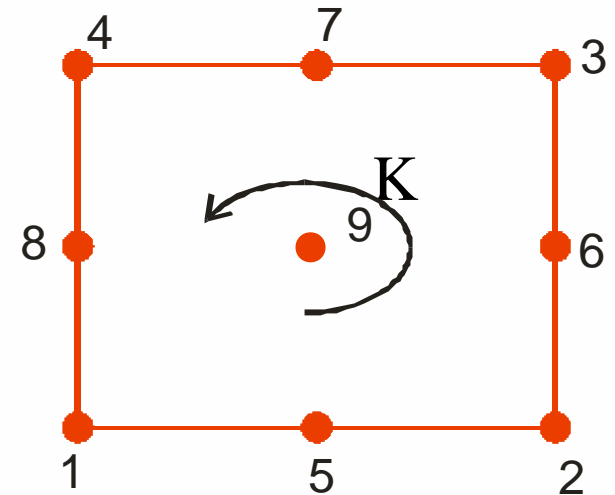
$$Q_2(K) = \left\{ v: v(x, y) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x^i y^j, \forall (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Toda función $v \in Q_2(K)$ está únicamente determinada por sus valores en los vértices, en el medio de los lados y en el centro del rectángulo K .

- Se puede demostrar fácilmente que existe continuidad interelementos de v .

- Luego, el espacio de EF es

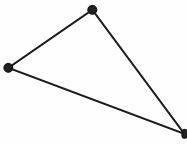
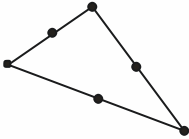
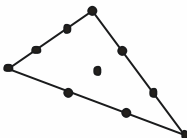
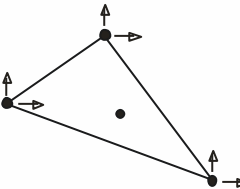
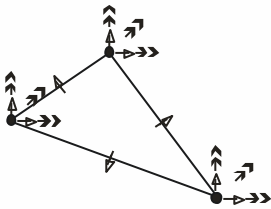
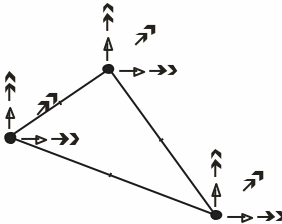



$$V_h = \left\{ v: v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v \in Q_2(K), \forall K \in T_h \right\}$$



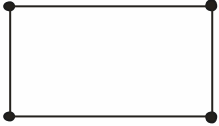
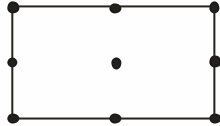
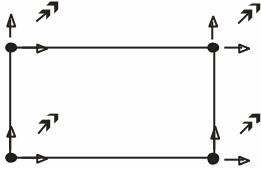



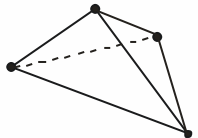
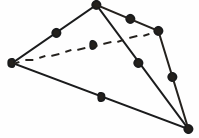



Resumen

- Definimos un elemento finito como la terna $\{K, P_K, \Sigma\}$, donde
 - K es un objeto geométrico.
 - P_K es un espacio lineal de dimensión finita de funciones definidas en K .
 - Σ es un conjunto de gdl que determinan de manera única toda función $v \in K$.
- Por ej., para el EF triangular lineal $\{K, P_K, \Sigma\}$, resulta
 - K es un triángulo.
 - $P_K = P_1(K)$.
 - Σ es el conjunto de valores de v en los vértices de K .

Tipos de elementos finitos más comunes

Geometria Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF	Geometria Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
	3	$P_1(K)$	C^0		6	$P_2(K)$	C^0
	10	$P_3(K)$	C^0		10	$P_3(K)$	C^0
	21	$P_5(K)$	C^1		18	$P_5(K)$	C^1
		•	Valor de la función				Valores de las derivadas segundas
			Valores de las derivadas primeras				Valor de la derivada normal al lado

Tipos de elementos finitos más comunes (cont)

Geometria	Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF	Geometria	Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
		4	$Q_1(K)$	C^0			9	$Q_2(K)$	C^0
		16	$Q_3(K)$	C^0			2	$P_1(K)$	C^0
		3	$P_2(K)$	C^0			4	$P_3(K)$	C^1
		4	$P_1(K)$	C^0			10	$P_2(K)$	C^0
			•	Valor de la función				Valores de las derivadas segundas	
				Valores de las derivadas primeras				Valor de la derivada normal al lado	

Soporte de diferentes funciones de base

