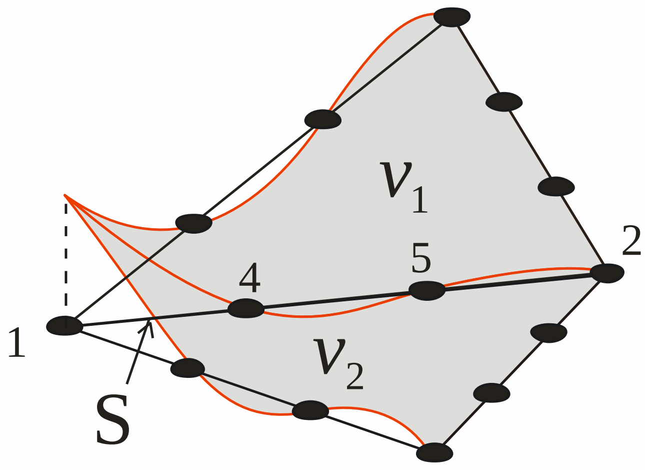


Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 8

MEF para problemas hiperbólicos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Problemas hiperbólicos

- Problemas de convección-difusión con convección dominante, i.e., con difusión pequeña o nula
- El MEF estándar aplicado a problemas hiperbólicos no funciona para problemas hiperbólicos donde la solución no es suave
- Si la solución exacta presenta por ej. una discontinuidad de salto, la solución por MEF presenta oscilaciones espurias aún lejos del salto
- Se desarrollaron MEF modificados, no estándar, para problemas hiperbólicos
  - Método de difusión a lo largo de la línea de corriente (Streamline diffusion)
  - Método de Galerkin discontinuo

Problemas de convección-difusión

- Consideremos la ecuación hiperbólica-parabólica lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\boldsymbol{\beta}) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = 0 \qquad \text{en } \Omega \times \mathrm{I}$$

  u: magnitud escalar, por ej. concentración

  $\boldsymbol{\beta}$: campo de velocidades

  σ: coeficiente de absorción

  $\varepsilon \geq 0$: coeficiente de difusión

- Esta ecuación tendrá un carácter más hiperbólico a medida que ε decrezca y $\beta = \|\boldsymbol{\beta}\|$ crezca
- Si $\varepsilon = 0$, obtenemos la ecuación *puramente hiperbólica* (convección pura)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\boldsymbol{\beta}) + \sigma u = \frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \underbrace{(\sigma + \nabla \cdot \boldsymbol{\beta})}_{\gamma} u = 0 \qquad \text{en } \Omega \times \mathrm{I}$$

- Consideremos el caso estacionario con u y $\boldsymbol{\beta}$ independientes del tiempo

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \gamma u = 0 \qquad \text{en } \Omega \in \mathbb{R}^d$$

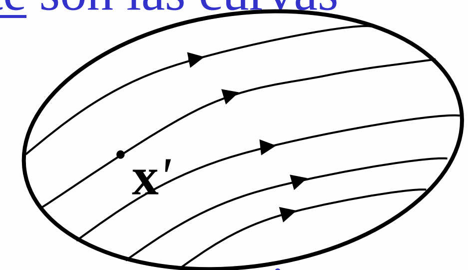
Problemas de convección pura en régimen estacionario

- Consideremos el caso estacionario con u y $\boldsymbol{\beta}$ independientes del tiempo

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u+\gamma u=0 \qquad \text{en } \Omega\in\mathbb{R}^d \qquad (1)$$

- Dado el campo de velocidades $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$, las <u>líneas de corriente</u> son las curvas $\mathbf{x}(s)$ solución del siguiente sistema de ODEs:

$$\frac{dx_i}{ds}=\beta_i \qquad i=1,\ldots,d$$



- Estas curvas, parametrizadas por s, también se llaman *curvas características* (o simplemente *características*) del problema (1).
- Supongamos que $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ es Lipschitz-continua, o sea

$$\exists C=cte \text{ t.q. } \|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\beta}(\mathbf{y})\|\le C\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \quad \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega$$

- Luego, por un punto $\mathbf{x}'\in\Omega$ pasa sólo una característica $\mathbf{x}(s)$, o sea

$$\exists!\mathbf{x}(s) \text{ t.q. } \frac{dx_i}{ds}=\beta_i \qquad i=1,\ldots,d$$
$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}'$$

Problemas de convección pura en régimen estacionario

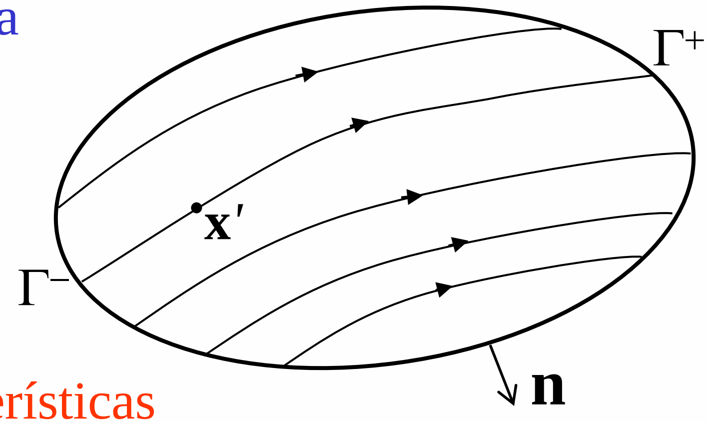
- Siendo $\mathbf{x}(s)$ una característica, por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{ds}u(\mathbf{x}(s)) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\beta_i = \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u$$

- Luego:

$$(1)\quad \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u + \gamma u = 0 \longrightarrow \frac{d}{ds}u(\mathbf{x}(s)) + \gamma u(\mathbf{x}(s)) = 0 \quad (2)$$

- La PDE (1) se reduce a la ODE (2) a lo largo de cada característica
- Si se conoce *u* en un punto de una característica $\mathbf{x}(s)$ dada, podemos determinar *u* en los demás puntos de $\mathbf{x}(s)$ integrando (2)
- **Ejemplo:** sea *u* conocida en la frontera de entrada
  - $\Gamma^- = \{\mathbf{x}\in\Gamma \text{ t.q. } \mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\beta}<0\}$.
  - Para un punto $\mathbf{x}'\in\Omega$, se puede determinar *u* integrando a lo largo de la característica que pasa por $\mathbf{x}'$ empezando en Γ^-



⇒ Los efectos se propagan siguiendo las características

Problemas de convección pura en régimen estacionario (cont)

- La solución *u* de puede ser discontinua a través de una característica.
  - Si u tiene una discontinuidad de salto en $\mathbf{x}' \in \Gamma^-$, la solución será discontinua a lo largo de toda la característica que pase por $\mathbf{x}'$.
  - Ejemplo: Sea el problema de convección pura en $\mathbb{R}^2$, con $\boldsymbol{\beta}$=[1 0] y γ =0:

$$u_{,1} = 0 \quad \text{para } 0 < x_1, x_2 < 1$$

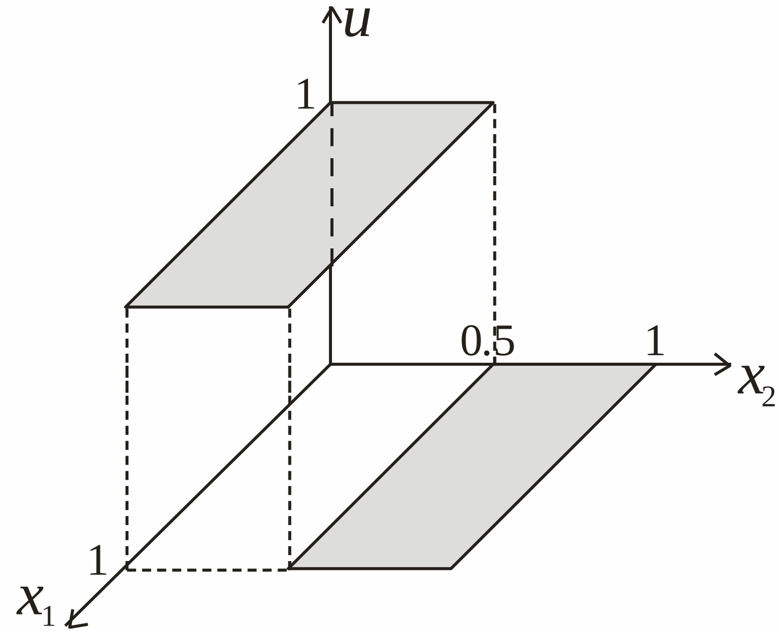
$$u(0, x_2) = 1 \quad \text{para } 0 < x_2 < 0.5$$

$$u(0, x_2) = 0 \quad \text{para } 0.5 < x_2 < 1$$

cuya solución es

$$u(x_1, x_2) = 1 \quad \text{para } 0 < x_2 < 0.5,\ 0 < x_1 < 1$$

$$u(x_1, x_2) = 0 \quad \text{para } 0.5 < x_2 < 1,\ 0 < x_1 < 1$$



Problemas de convección pura en régimen transitorio

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \gamma u = 0$$

- Haciendo $x_0 \equiv t$ y $\beta_0 = 1$, podemos transformar la ecuación anterior en otra de forma idéntica a la convección pura estacionaria

$$\sum_{i=0}^{d} \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma u = 0 \qquad \text{en } \Omega \in \mathbb{R}^d$$

- Las características de esta ecuación son curvas $(\mathbf{x}(t),t)$ en espacio y tiempo, donde $\mathbf{x}(t)$ satisface

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta_i(\mathbf{x},t) \qquad i = 1,\ldots,d$$

- Aquí adoptamos el parámetro s igual a $t \equiv x_0$.
- La ecuación correspondiente a x_0 es simplemente $\dfrac{dx_0}{ds} = \beta_0 = 1$

Métodos numéricos P/ecs hiperbólicas

1) Características
2) DF
3) EF

Características: P/ecs lineales escalares en varias dimensiones espac y P/ sistemas lineales en 1 dimensión espacial

a) Resolver la ec característica
b) Integrar una ODE a lo largo de ésta.

Difícil de usar en la práctica, sobre todo P/sistemas.

Dif fin / EF: Se adaptan mejor a casos "complicados".
En principio, usan "malla fija", facilitando pgmación.

Contra: aparecen probl numéricos si la solución no es suave.
Ej: "salto" a través de la característica.

- EF o DF standard ⟹ oscilaciones.
(Galerkin std, dif centradas)

dif artif • Difusión artificial clásica ⟹ suaviza demasiado los frentes abruptos (sol difusiva)

Ecs: Transitorio (*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\underline{\beta}\, u) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = f & (x,t) \in \Omega \times I \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Estacionario (**)

$$\left[\operatorname{div}(\beta u) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = f \right. \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

BC: Neuman, Dirichlet, Robin, etc

$$I = (0,T) \qquad \underbrace{\sigma, \varepsilon \geq 0 \qquad \underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_d)}_{\text{funciones suaves de } (x,t) \text{ o de } x}$$

Asumimos:

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \underline{\beta} + \sigma \geq \alpha > 0 \quad \text{(estacionario)}$$

$$\geq 0 \quad \text{(transit)}$$

Esta condición asegura estabilidad de (*) y (**) $\forall \varepsilon \geq 0$

Problemas modelo estacionarios

1) Ω dominio poligonal convexo cerrado en $\mathbb{R}^2$ c/ frontera Γ

$\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ vector constante c/ $|\beta| = 1$

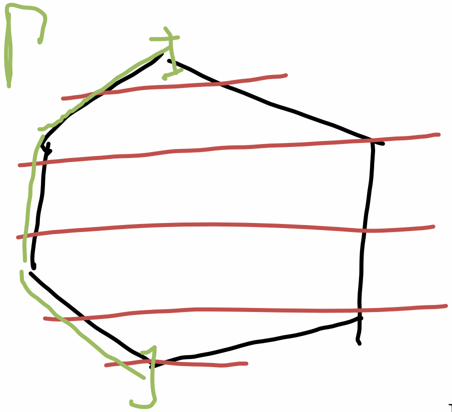
$$-\varepsilon \Delta u + u_\beta + u = f \quad \text{en } \Omega$$
$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma$$

$\varepsilon > 0$

$u_\beta \doteq \underline{\beta} \cdot \nabla u$ (derivada direccional en dir β)

2) Problema reducido corresp $\Rightarrow \varepsilon = 0$

Γ^-



$$u_\beta + u = f \quad \text{en } \Omega$$
$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma^-$$

1) La solución del prob reducido puede ser discontinua (con un salto) a través de una característica.

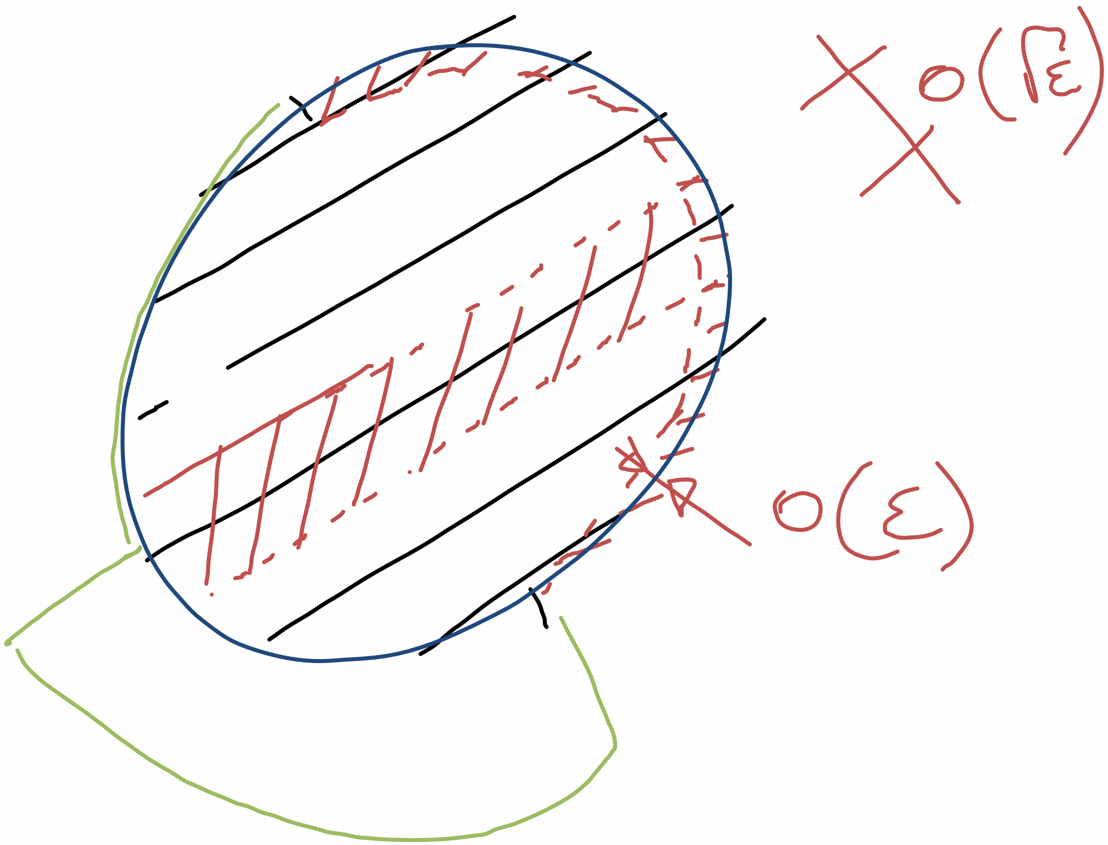
2) La solución del prob completo es continua en Ω.

El salto es "dispersado" en una región de ancho $O(\sqrt{\varepsilon})$ entorno a la característica.

$\Longrightarrow$ esta región se llama "layer" interna

3) Si los valores alcanzados por u en la frontera de salida p/el prob reducido difieren del valor g especificado en el prob completo $\Longrightarrow$ se forma un salto "~~dispersado~~" en un ancho $O(\varepsilon)$

$\Longrightarrow$ esta región se llama "layer" de frontera.


$\times\ O(\sqrt{\varepsilon})$
$O(\varepsilon)$

Galerkin std P/ prob estacionario

Forma variacional:

Hallar $u \in H^1(\Omega)$ /

$$\varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (u_\beta + u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

E. Finitos

$$\mathring{V}_h = \{ v \in V_h \subset H^1(\Omega) \,/\, v = 0 \text{ sobre } \Gamma \}$$

Hallar: $u^h \in \mathring{V}_h$ /

$$\varepsilon(\nabla u^h, \nabla v) + (u_\beta^h + u^h, v) = (f, v)$$

$$\forall v \in \mathring{V}_h$$

Este método funciona bien si $\varepsilon \geq h$

$\boxed{\text{Dimensiones?}}$

Si $\varepsilon < h \Rightarrow$ oscilaciones.

$\beta \cdot \nabla u$ $\quad$ $\beta = 1$, $\nabla u = u_x$

Ejemplo

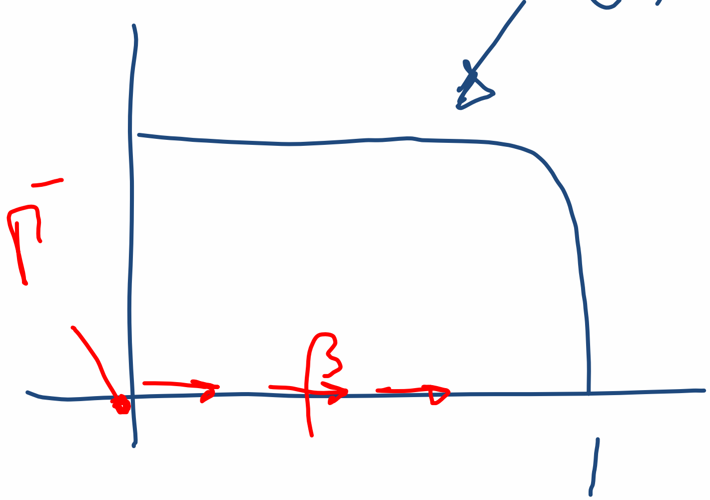
$$-\varepsilon u_{xx} + u_x = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$0 < \varepsilon \ll 1 \qquad u(0) = 1 \qquad u(1) = 0$$

Sol exacta:

$$u(x) = a\left(1 - e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}}\right)$$

$$\left(1 - e^{-1/\varepsilon}\right)^{-1}$$



Veremos prob reducido ($\varepsilon = 0$)

a) Galerkin std c/ condiciones de borde fuertemente impuestas

Hallar $u^h \in V_h$, $u^h = g$ en Γ_- /

$$(u^h_\beta + u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

$v = 0$ en Γ_-

b) Galerkin std c/ condiciones de borde débilmente impuestas

Hallar $u^h \in V_h$ /

$$(u^h_\beta + u^h, v) - \langle u^h, v \rangle_- = (f, v) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in V_h$$

$$\langle v, w \rangle_- = \int_{\Gamma_-} v\, w\, \underline{n} \cdot \underline{\beta}\, ds$$

$$b(w,v) \triangleq (w_\beta + w, v) - \langle w, v\rangle_-$$

$$l(v) \triangleq (f, v) - \langle g, v\rangle_-$$

$\therefore$ Hallar $u^h \in V_h \,/\, \quad b(u^h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$

La solución exacta satisf la formulación — $\quad b(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$

Ec del error $\qquad b(\underbrace{u - u^h}_{e}, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$

Lema $\forall\, v \in H^1(\Omega) \Longrightarrow b(v,v) = \|v\|^2 + \frac{1}{2}\, |v|^2$

donde $|v|^2 = \int_\Gamma v^2\, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds$

$n\cdot\beta = \begin{cases} >0 & \Gamma_+ \\ <0 & \Gamma_- \end{cases}$

D) Green:

$$(v_\beta, v) = -(v, v_\beta) + \langle v, v\rangle$$

Ejerc $\int \beta\cdot\nabla v\; v\, d\Omega = -\int v\; \beta\cdot\nabla v\, d\Omega + \int_\Gamma v\; v\; n\cdot\beta\, ds$

$$(v_\beta, v) = \frac{1}{2}\langle v,v\rangle = \frac{1}{2}\langle v,v\rangle_- + \frac{1}{2}\langle v,v\rangle_+$$

$$b(v,v) = (v_\beta + v, v) - \langle v,v\rangle_- = \|v\|^2 + \frac{1}{2}\langle v,v\rangle_- + \frac{1}{2}\langle v,v\rangle_+ - \langle v,v\rangle_-$$

$$b(v,v) = \|v\|^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\langle v,v\rangle_+ - \frac{1}{2}\langle v,v\rangle_-}_{\frac{1}{2}|v|^2}$$

Nota: podemos plantear sist ecs alg:

$$b(u^h, \varphi_i) = l(\varphi_i) \qquad i = 1, \dots N \qquad \{\varphi_i\} \text{ base de } V_h$$

$$u^h = \varphi_i a_i \implies b(\varphi_i, \varphi_j)\, a_j = l(\varphi_i)$$

El lema anterior asegura:

$$b(\varphi_i, \varphi_j) > 0 \quad (\text{matriz def posit})$$

$\therefore\ \exists!\ a_j$ o sea $\exists!\ u^h / b(u^h, v) = l(v)$
$\forall v \in V_h$

Teo $\exists$ una cte C / si u satisface el prob reducido y u^h es solución del prob c/cond borde débilmente impuestas

$$\|u-u^h\| + |u-u^h| \leq C\, h^r\, \|u\|_{r+1}$$

Si u fuera suave / $\|u\|_{r+1}$ fuera finita $\Rightarrow$ Gal std converge como a $O(h^r)$

Pero, si u no es suave $\longrightarrow$ no podemos asegurar nada.

D) Sea $\tilde{u}^h \in V_h$ el interpolante de u /

Error interp $\|u-\tilde{u}^h\| \leq C h^{r+1} \|u\|_{r+1}$

$\|u-\tilde{u}^h\|_1 \leq C h^{r} \|u\|_{r+1}$

$\eta^h = u - \tilde{u}^h$; $e^h = u^h - \tilde{u}^h = \underbrace{u^h}\underbrace{-u}_{-e} + \underbrace{u}\underbrace{-\tilde{u}^h}_{\eta^h} = \eta^h - e$

Por el Lema ant. y por la ec. del error:

$\|e^h\|^2 + \frac{1}{2}|e^h|^2 = b(e^h, e^h) = b(\eta^h, e^h) - \cancel{b(\underbrace{e}, \underbrace{e^h})}$

$e^h \in V^h$ y sabemos $b(e, v) = 0 \ \forall v \in V_h$

$= (\eta^h + \eta^h_\beta, e^h) - \langle \eta^h, e^h \rangle$ $*$

Desigualdad auxiliar $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon^2 a^2 - 2\varepsilon ab + b^2 \geq 0\right)$

$$(u,v) \le \frac{1}{2}\left(\frac{\|u\|^2}{\varepsilon} + \|v\|^2\varepsilon\right) \underset{\varepsilon=2}{=} \frac{\|u\|^2}{4} + \|v\|^2$$

$$(*) \le \|\eta^h_\beta\|^2 + \frac{\|e^h\|^2}{4} + \|\eta^h\|^2 + \frac{\|e^h\|^2}{4} + |\eta^h|^2 + \frac{|e^h|^2}{4}$$

$$\frac{\|e^h\|^2}{2} + \frac{1}{4}|e^h|^2 \le \|\eta^h_\beta\|^2 + \|\eta^h\|^2 + |\eta^h|^2 + \cancel{\frac{1}{2}\|e^h\|^2} + \cancel{\frac{1}{4}|e^h|^2}$$

$$\|\eta^h_\beta\| + \|\eta^h\| + |\eta^h| \le C\,h^r\,\|u\|_{r+1}$$

← Hay pasos intermedios!

$$\therefore\ \|e^h\| + |e^h| \le C\,h^r\,\|u\|_{r+1}$$

Dif. entre EF e interpolante

$$e^h = u^h - \tilde{u}^h$$

$$e = u - u^h = \eta^h - e^h$$

$$\|e\| + |e| = \|u-u^h\| + |u-u^h| \leq \|\eta^h\| + \|e^h\| +$$

$\uparrow \eta^h - e^h$ $\qquad\qquad$ $\uparrow$ Des Triang

$$+ |\eta^h| + |e^h| \leq C\, h^r \|u\|_{r+1}$$

$\uparrow$ Usando error interpolación y dif EF/interp.

$$\boxed{\|u-u^h\| + |u-u^h| \leq C h^r \|u\|_{r+1}}$$

Difusión artificial

Buscamos evitar el problema $\varepsilon < h$

(i) disminuir h hasta $h \leq \varepsilon$

(ii) Resolver un problema modificado añadiendo un término de difusión $-\delta \Delta u$ hasta estabilizar:

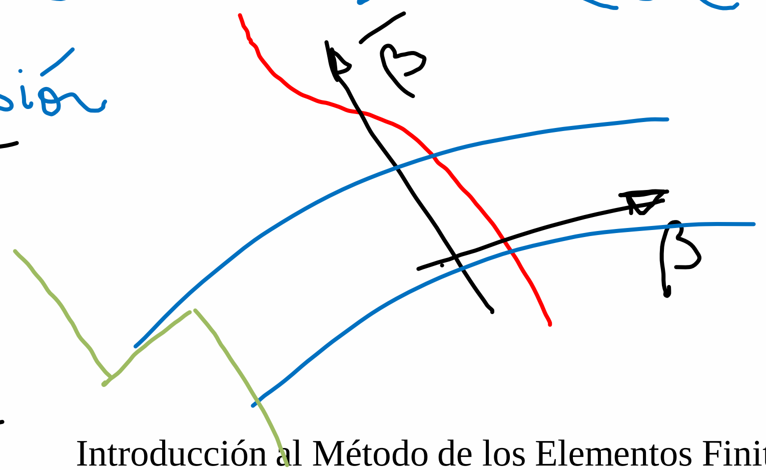
$$\delta = h - \varepsilon$$

$\therefore$ Hallar $u^h \in V_h$ /

$$h(\nabla u^h, \nabla v) + (u^h_\beta + u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

Claramente las soluciones no son oscilantes, pero se introduce demasiada difusión

La precisión cae a primer orden



$$-h\, u_{\beta\beta}$$

Difusión a lo largo de las líneas de corriente

Para eliminar las oscilaciones alcanza con añadir difusión en la dirección β.

$$-\delta\, u_{\beta\beta}$$

Hallar $u^h \in V_h$ /

$$\varepsilon\,(Du^h, Dv) + \underbrace{\delta\,(u^h_\beta, v_\beta)} + (u^h_\beta + u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

Añadimos menos difusión que en el caso anterior, pero estamos aún perturbando en $O(h)$ la ecuación. El error sigue siendo $O(h)$.

¿Como introducir δ sin perturbar la ecuación?

Streamline upwind diffusion c/ $\varepsilon = 0$ Upwind

Reemplazamos las funciones de test!

$$v \in V_h \longrightarrow v + h v_\beta$$

Hallar $u^h \in V_h$ /

$$(u^h_\beta + u^h, v + h v_\beta) - (1+h) \langle u^h, v \rangle_- = (f, v + h v_\beta) - (1+h) \langle g, v \rangle_-$$

$\forall v \in V_h$

1) Desarrollando el prod: $h(u^h_\beta, v_\beta) \longrightarrow$ difusión en la dirección β

2) Reemplazo u^h x la sol exacta $\longrightarrow$ Verifica la ec variacional. $\longrightarrow$ no hay perturbación!

$$B(w,v) = (w_\beta + w, v + h v_\beta) - (1+h)\langle w, v\rangle_-$$

$$L(v) = (f, v + h v_\beta) - (1+h)\langle g, v\rangle_-$$

Hallar $u^h \in V_h$ / $\quad - \; B(u^h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h$

$e = u - u^h$

Sol exacta $\quad + \; B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h$

$$B(e, v) = 0 \qquad \text{Ec error}$$

Veremos si llega consistencia del error en la norma:

$$\|v\|_\beta = \left(h \|v_\beta\|^2 + \|v\|^2 + \frac{1+h}{2} |v|^2 \right)^{1/2}$$

Lema 9.2 $\quad B(v,v) = \|v\|_\beta^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

D) Idem anterior

Teorema $\quad \exists$ una cte C / si u^h es sol prob débil $B(u^h,v) = l(v)$ $\forall v$

y u sol exacta luego:

$$\|u - u^h\|_\beta \leq C\, h^{r+1/2} \|u\|_{r+1}$$

D) Idem teorema anterior.

1) Este método tiene "estabilidad extra" respecto de Galerkin std en la dirección β.

$$b(v,v) \longrightarrow \|v\|^2 + |v|^2$$

$$B(v,v) \longrightarrow \|v_\beta\|^2 + \|v\|^2 + |v|^2$$

2) La estimación de error obtenida implica:

$$\|u-u^h\| \leq C h^{r+1/2} \|u\|_{r+1} \longleftarrow \text{le falta } 1/2 \text{ p/ser óptima}$$

$$\|u_\beta-u^h_\beta\| \leq C h^{r} \|u\|_{r+1} \longleftarrow \text{estimación es óptima}$$

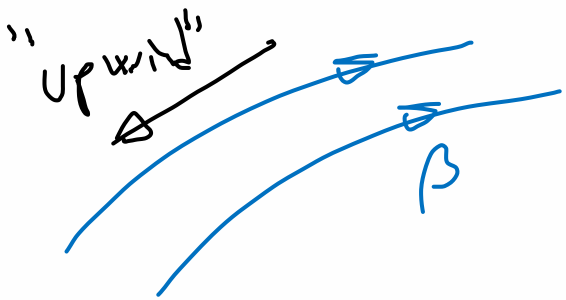
En el método planteado la información propaga aproximadamente como en el caso continuo → esencialmente a lo largo de las características.

Se puede probar que una fuente en un punto $P \in \Omega$ decae como:

$$e^{-d/(c\sqrt{h})} \quad \text{en dirección } \overline{\beta}$$

$$e^{-d/(ch)} \quad \text{en dirección upwind}$$

d: distancia al punto



Método streamline... $\varepsilon > 0$

$$v_\beta = \beta \cdot \nabla v$$

$$-\varepsilon \Delta u + u_\beta + u = f \quad \text{en } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

Multiplicamos x la f. de test: $v + \delta v_\beta$ e integramos: $v \in H_0^1(\Omega)$

$$(v + \delta v_\beta, -\varepsilon \Delta u + u_\beta + u) = (v + \delta v_\beta, f)$$

$$-\varepsilon \delta (\Delta u, v_\beta) - \varepsilon (\Delta u, v) + (v + \delta v_\beta, u_\beta + u) = (v + \delta v_\beta, f)$$

$$(\Delta u, v) = \int v \Delta u \, d\Omega = \underbrace{\int_\Gamma v \nabla u \cdot n \, d\Gamma}_{0} - \int \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega = -(\nabla v, \nabla u)$$

$$-\varepsilon\delta\,(v_\beta, \Delta u) + \varepsilon\,(\nabla v, \nabla u) + (v + \delta v_\beta, u_\beta + u) = (v + \delta v_\beta, f)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Análogo discreto:

$u \to u^h \in \mathring{V}_h$

v restringido a $\mathring{V}_h$

$$V_h = \{ v \in H^1(\Omega) \,/\, v|_K \in P_r(K) \ \forall K \in T_h \}$$

$$\mathring{V}_h = \{ v \in V_h \,/\, v|_\Gamma = 0 \}$$

¿Cómo calcular $(v_\beta, \Delta u^h)$?

Definimos:

$$(v_\beta, \Delta u^h) \triangleq \sum_{K \in T_h} \int_K v_\beta \,\Delta u^h \, d\Omega$$

Método

Hallar $u^h \in \mathring{V}_h$ /

$$\varepsilon\,(Du^h, Dv) - \varepsilon\delta\,(\Delta u^h \beta, Dv) + (u^h_\beta + u^h, v + \delta v_\beta) = (f, v + \delta v_\beta) \quad \forall v \in \mathring{V}_h$$

donde i) $\delta = \bar{c}\,h$ si $\varepsilon < h$

con $\bar{c}$ suficientemente pequeño.

ii) $\delta = 0$ si $\varepsilon \geq h \longrightarrow$ Gal std

1) La formulación es consistente $\longrightarrow$ u satisface la F.Varic.

2) Las prop de estab y estimac de error del caso $\varepsilon = 0$ se extiend a éste.

Si Th no es uniforme, o si $|\beta|$ es variable, se elige:

$$\delta = \bar{c}\,\frac{h_k}{|\beta|} \qquad \text{si } \varepsilon < h_k|\beta|$$

$$\delta = 0 \qquad \text{sí } \varepsilon \geq h_k|\beta|$$

El hecho de usar fcs de test diferentes de las fcs de interpolación, es conocido como método de Petrov-Galerkin.