Introducción al Método de los Elementos Finitos
Guía Núm. 1
7/9/11

1. Mostrar que si w es continua en $[0,1]$ y
$$\int_0^1 wv\,dx = 0 \qquad \forall v \in V$$
donde $V = \{v/v$ continua en $[0,1]$, v' continua a trozos acotada, y $v(0) = v(1) = 0\}$, luego $w(x) = 0$ para $x \in [0,1]$.

2. Sea el problema de valores de frontera siguiente:
$$(D) \qquad \begin{aligned} -\,u''(x) &= f(x) \qquad -1 < x < 1 \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$
Explique la relación existente entre esta ecuación y los problemas físicos siguientes:
   a) Barra en tracción con carga distribuida longitudinal
   b) Cuerda tensa con carga transversal
   c) Transmisión de calor en una barra

3. Sea el problema anterior para el caso
$$f(x) = e^{-(x/\varepsilon)^2}$$
donde ε es una constante real positiva.
En el programa adjunto, se muestra que la solución analítica de este problema resulta:
$$u(x) = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(e^{-1/\varepsilon^2} - e^{-x^2/\varepsilon^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - x\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$
donde erf() es la llamada "función de error de Gauss".
Modificar el programa distribuido en el archivo "Ejemplo1D.rar", para resolver este problema utilizando elementos finitos lineales, para dos casos:
   a) $\varepsilon = 10$.
   b) $\varepsilon = 0{,}01$.

   Calcular la solución para distintos tamaños de malla (partición uniforme), y calcular las tasas de convergencia de la solución y de sus derivadas en ambos casos. Comparar ambos y extraer conclusiones relacionando con los desarrollos hechos en la teoría.
   Sugerencia: Las integrales necesarias para el cálculo del término de derecha, pueden calcularse usando el modulo de manejo simbólico de Matlab.

4. Construya un subespacio de dimensión finita V_h de V consistente en funciones cuadráticas en cada subintervalo I_j de una partición de $I = (-1, 1)$. Cómo pueden elegirse los parámetros que describan estas funciones ? Halle las funciones de base correspondientes. Luego formule un método de elementos finitos para el problema:

$$(D) \qquad \begin{aligned} &-u''(x) = f(x) \qquad -1 < x < 1 \\ &u(-1) = u(1) = 0 \end{aligned}$$

usando el subespacio V_h y escriba el sistema de ecuaciones lineales que resulta cuando se escoge una partición uniforme.

5. Considerar el problema siguiente:

$$(D) \qquad \begin{aligned} &u^{IV}(x) = f(x) \qquad\qquad 0 < x < 1 \\ &u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación corresponde, por ejemplo, al problema físico de calcular el desplazamiento u de una viga doblemente empotrada, con una carga transversal de intensidad $f(x)$.

a) Mostrar que este problema puede ser resuelto usando la siguiente formulación variacional: Hallar $u \in W$ tal que:

$$(u'', v'') = (f, v) \qquad \forall v \in W$$

donde $W = \{v : v, v'$ son continuas en $[0, 1]$, v'' continua a trozos acotada, y $v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$.

b) Para un intervalo $I = [a, b]$, definir $P_3(I) = \{v : v$ es un polinomio de grado ≤ 3 sobre I, o sea es de la forma $v(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad x \in I, a_i \in R\}$.
Mostrar que v está definido en forma única por los valores $v(a), v'(a), v(b), v'(b)$. Hallar las funciones de base correspondientes (la función de base que corresponde al valor $v(a)$ es el polinomio cúbico v tal que $v(a) = 1, v'(a) = 0, v(b) = v'(b) = 0$).

c) A partir de (b), construya un subespacio de dimensión finita W_h de W que consista en funciones polinomiales cúbicas. Especifique parámetros adecuados para describir las funciones en W_h y determine las funciones de base correspondientes. Formule el MEF basado en el subespacio W_h. Halle el sistema de ecuaciones para el caso de partición constante. Determine la solución para el caso de dos intervalos y $f(x)$ constante. Comparar con la solución exacta.

6. Halle la matriz de rigidez de un elemento triangular K con vértices $(0, 0), (h, 0)$, y $(0, h)$, para el análisis de la ecuación de Poisson. Mostrar que la matriz de rigidez en este caso resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7. Sea Ω un dominio acotado en el plano, con frontera Γ dividida en dos partes Γ_1 y Γ_2. Dé una formulación variacional para el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \qquad &&\text{en } \Omega \\ u &= u_0 &&\text{sobre } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= \boldsymbol{g} &&\text{sobre } \Gamma_2 \end{aligned}$$

donde f, u_0 y $\boldsymbol{g}$ son funciones dadas. Formule luego el método de elementos finitos para este problema. Dé una interpretación física al problema planteado.