Introducción al Método de los Elementos Finitos
Guía Núm. 5

1. Sea K un tetraedro con vértices $a^i, i = 1,2,3,4$, y sea a^{ij} el punto medio sobre la línea $a^i a^j,\ i < j$. Mostrar que una función $v \in P_2(K)$ está unicamente determinado por los grados de libertad $v(a^i), v(a^{ij}),\ i,j = 1,\dots 4,\ i < j$. Mostrar que el espacio de elementos finitos correspondiente V_h satisface $V_h \subset C^0(\Omega)$.

2. Considere el mapeo $F(\widehat{K}) \to K$ con $F(r,\theta) = (r\sin\theta, r\cos\theta)$, $\widehat{K} = \{(r,\theta), 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ $K = \{x \in R^2, 1 \leq |x| \leq 2\}$. Mostrar que el Jacobiano de F es diferente de cero en $\widehat{K}$ y que $F(\widehat{K}) \to K$ no es uno-a-uno. Esto muestra que la condición de Jacobiano no nulo no es suficiente para garantizar que un mapeo es globalmente uno-a-uno.

3. Sea $\widehat{K}$ el triángulo unitario de esquinas $\widehat{a}^i = 1,2,3$ y nodos en el medio de los lados $\widehat{a}^i = 4,5,6$; sea $P_K = P_2(\widehat{K})$ y sea $\widehat{\Sigma}$ el conjunto de grados de libertad correspondientes a los valores en los nodos $\widehat{a}^i$. En la teoría vimos que si K es un triángulo con poca distorsión, luego podemos definir un elemento finito isoparamétrico (K, P_K, Σ_K) mediante:

$$P_K = \left\{p:\ p(x) = \widehat{p}(F^{-1}(x)),\ x \in K, \widehat{p} \in P_{\widehat{K}}\right\}$$
$$\Sigma_K = \left\{\text{los valores en } a^i = F(\widehat{a}^i),\ i = 1,2,3,4,5,6\right\}$$

Implementar este elemento dentro del programa *MatFem*. Verificar su funcionamiento en un conjunto de casos de prueba.

4. Sea $\widehat{K}$ el cuadrado unitario de esquinas $\widehat{a}^i = 1,2,3,4$, sea $P_K = Q_1(\widehat{K})$ y sea $\widehat{\Sigma}$ el conjunto de grados de libertad correspondientes a los valores en los nodos $\widehat{a}^i$. Probar que si K es un cuadrilátero convexo, luego podemos definir un elemento finito isoparamétrico (K, P_K, Σ_K) mediante:

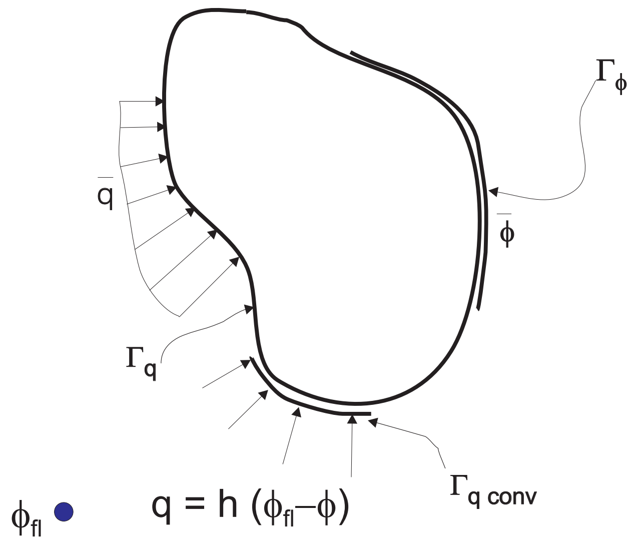
$$P_K = \left\{p:\ p(x) = \widehat{p}(F^{-1}(x)),\ x \in K, \widehat{p} \in P_{\widehat{K}}\right\}$$
$$\Sigma_K = \left\{\text{los valores en } a^i = F(\widehat{a}^i),\ i = 1,2,3,4\right\}$$

Este elemento es usado frecuentemente en la práctica.

5. Implementar el elemento mencionado en el punto anterior dentro del programa *MatFem*. Aplicarlo para la solución del problema de transmisión del calor, con conductividad constante k_x, k_y (distintas de 1), y de condiciones de borde mixtas para fronteras con convección a un fluido exterior y/o flujos impuestos :

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = Q && \text{en } \Omega \\
& \phi = \overline{\phi} && \text{sobre } \Gamma_\phi \\
& k_x n_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial\phi}{\partial y} = \overline{q} && \text{sobre } \Gamma_q \\
& k_x n_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial\phi}{\partial y} = h(\phi_{fl} - \phi) && \text{sobre } \Gamma_{conv}
\end{aligned}
$$

Comparar resultados con los obtenidos usando el elemento triangular desarrollado anteriormente.



6. Sea el problema parabólico unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

con condiciones de borde:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = u^0(x) \qquad\qquad 0 < x < \pi$$

Discretice espacialmente usando funciones de forma lineales por tramos sobre una particón uniforme de paso espacial h y determine el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias correspondiente. Determine luego el valor de la constante C requerida en el requerimiento de estabilidad, para el método de integración temporal de Euler hacia adelante, con paso uniforme k. Determinar además los números de condición de las matrices B y A.

Ayuda: Los autovectores de las matrices B y A en este caso están dados por $v^j = \{v_1^j, \ldots v_M^j\}$, con

$$v_i^j = \sin\left(\frac{ij\pi}{M+1}\right) \qquad M = \frac{1}{h} - 1$$

7. Sea el problema parabólico unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

con condiciones de borde:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(\pi,t) = 1 \qquad t > 0$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = 0 \qquad\qquad 0 < x < \pi.$$

Desarrolle un programa en Matlab para resolver el problema planteado, usando los métodos de Euler hacia adelante, Euler hacia atrás y Crank Nicolson. Utilice un paso espacial constante $h = 0{,}1$. Compare las soluciones logradas con los distintos métodos de integración, para distintos pasos temporales (aunque constante).

a) Cual es el máximo paso que puede usar en Euler hacia adelante sin que se presenten problemas de estabilidad ? Como es este paso respecto del límite teórico de estabilidad?

b) El problema tiene solución analítica, la cual puede usar como referencia. Compare el error obtenido en los distintos métodos en función del paso de tiempo.

c) Estudie el efecto que tiene sobre la solución aproximada el cambiar el paso de tiempo espacial, sobre todo analizando lo que ocurre en el transitorio inicial.