9) Problemas hiperbólicos (Johnson)

9.1) Introducción:

Hemos visto hasta ahora cómo el MEF da buenos resultados p/ problemas elípticos (idem parabólicos, aunque no los tratamos). Veremos ahora problemas hiperbólicos, por ej. convección-difusión c/ difusión pequeña (o nula). Ej: mecánica de fluidos, dinámica de gases, propagación de ondas.

Se vio de un principio que el MEF ~~xxxx~~ aplicado en forma standard presenta ~~fallas~~ inconvenientes c/ problemas de este tipo. Específicamente, los problemas aparecen cuando la solución exacta no es suave. Si ésta posee una discontinuidad ("salto"), luego el MEF en gral exhibe oscilaciones espúreas aún lejos del salto, ~~xxx~~ ~~xxxxxxxxxx~~ introduciendo un error apreciable en la solución numérica. Para evitar este inconveniente, se desarrollaron métodos "modificados MEF" adaptados a prob. hip. Veremos en este capítulo dos de ellos:

- "Streamline diffusion" (difusión a lo largo de las líneas de corriente)
- "Galerkin discontinuo".

Los compararemos c/ métodos standard. Estos métodos se aplican a sist. de 1° orden, e.g. convección-difusión c/ difusión pequeña.

9.2) Problema de convección-difusión

ecuación:

$$(9.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(u\beta) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times I$$

u: escalar representando, por ej., concentración.

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_d)$: campo de velocidad

σ: coeficiente de absorción

$\varepsilon \geq 0$: coef difusión

$\Omega \in \mathbb{R}^d$, $I = (0,T)$: interv de tiempo

La ec(9.1) es de tipo mixto hiperbólico/parabólico, siendo el carácter gobernado por tamaño de β y ε.
Asumimos $|\varepsilon|$ pequeño $\Rightarrow$ (9.1) $\approx$ hiperbólica.
En particular, para $\varepsilon = 0$:

(9.2) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\beta) + \sigma u = 0 \quad \text{en } \Omega \times I$$

o equiv:

(9.3) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = 0 \quad \text{en } \Omega \times I$$

con $\gamma = \sigma + \operatorname{div} \beta$. (Prob puramente hiperbólico)

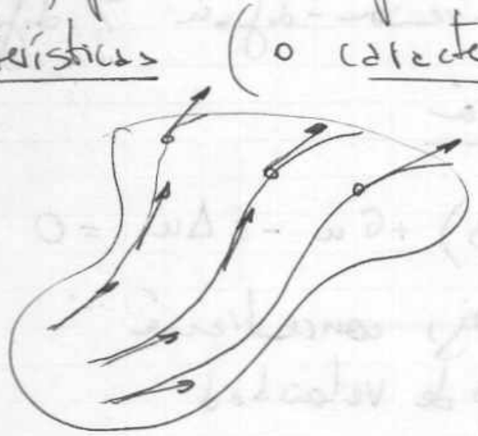
Consideramos primero una situación estacionaria, con u y β indep del tiempo:

(9.4) $$\beta \cdot \nabla u + \gamma u = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ coeficientes dados. Las <u>líneas de corriente</u> corresp a una velocidad dada $\beta = (\beta_1, \dots \beta_d)$ están dadas por las curvas $x(s)$, $x = (x_1, \dots x_d)$, con $x(s)$ solución del sist de ecs:

$$\frac{dx_i}{ds} = \beta_i(x) \qquad i = 1, \dots d$$

Estas curvas, parametrizadas por s, se también llaman <u>curvas características</u> (o características) del prob (9.4)



Asumiendo β es Lipschitz-continua en Ω, i.e.

$$|\beta(x) - \beta(y)| \leq C\,|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega \text{ y algún } C \text{ cte},$$

luego en un punto $\bar{x} \in \Omega$ pasa exactamente 1 (y solo 1) característica $x(s)$. O sea $\exists ! \; x(s) /$

(9.5) $\quad \dfrac{dx_i}{ds} = \beta_i(x) \quad i = 1, \dots d \quad , x(0) = \bar{x}$

Siendo $x(s)$ una característica, por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{d}{ds} u(x(s)) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \beta_i = \beta \cdot \nabla u$$

$\therefore$ en (9.4):

(9.6) $$\frac{d}{ds} u(x(s)) + \mu\, u(x(s)) = 0$$

$\therefore$ a lo largo de c/ característica la ec dif en der parc (9.4) se reduce a una EDO. Si la concentración u es conocida en 1 pto de la característica $x(s)$, luego u puede determinarse en otros puntos de $x(s)$ por integración de (9.6). Como ejemplo, si asumimos que u está dado en la frontera de entrada Γ_-, donde:

$$\Gamma_- = \{ x \in \Gamma / n(x) \cdot \beta(x) < 0 \}$$

siendo Γ frontera total y $\underline{n}(x)$ vector normal saliente unitario la concentración u en un pto arbitrario $\bar{x}$ de Ω se puede calcular por integración a lo largo de la característica que pasa por $\bar{x}$ y que comienza en Γ_- $\Rightarrow$ los efectos se propagan a lo largo de las características.

Es importante notar que la solución u de (9.1) puede ser discontinua a través de una característica. Por ejemplo, si u tiene una discontinuidad escalón en algún punto $\bar{x} \in \Gamma_-$, luego la solución será discontinua a través de la característica que pasa por $\bar{x}$. Ej:

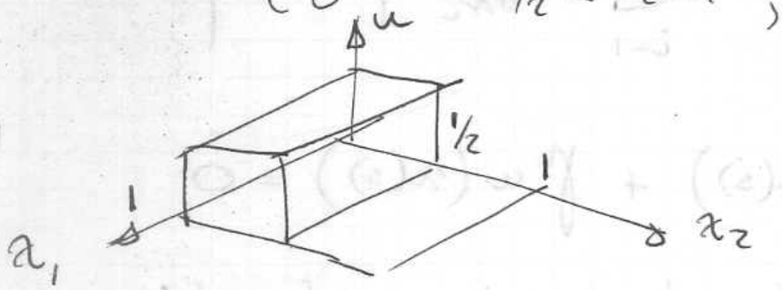
$$\partial u / \partial x_1 = 0 \qquad \text{en } \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x_i < 1\}$$

$$u(0, x_2) = 1 \qquad 0 < x_2 < 1/2$$

$$u(0, x_2) = 0 \qquad 1/2 < x_2 < 1$$

(esta ecuación corresponde a $\beta = (1,0)$, $\gamma = 0$ en (9.1)) La solución:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & 0 < x_2 < 1/2, \quad 0 < x_1 < 1 \\ 0 & 1/2 < x_2 < 1, \quad 0 < x_1 < 1 \end{cases}$$



Hacer ej. c/ tiempo

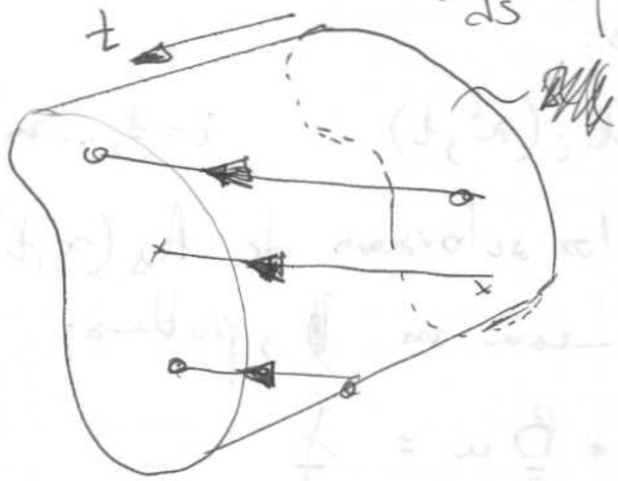
Volvemos ahora al problema dependiente del tiempo (9.3). Reemplazando t por x_0 y hacemos $\beta_0 = 1$. Luego, podemos escribir:

$$(9.7) \quad \partial u / \partial t + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = 0 \Rightarrow \sum_{i=0} \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma u = 0$$

Formalmente esta ecuación es del mismo tipo que la (9.1) y la discusión de (9.1) también se aplica a (9.7). En particular las características de (9.7) son las curvas $(x(t), t)$ en el espacio-tiempo, donde $x(t)$ satisface

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \beta_i(x,t) \qquad i=1,\dots d$$

(Notar que hemos elegido el parámetro s igual a $t = x_0$, correspondiendo c/la ecuación $\frac{dx_0}{ds} = \beta_0 = 1$)



Nota 9.1 Ecs similares:

Dinámica de gases: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$

(la velocidad es desconocida, se determina por otras ecs)

Nota Generalización de la ec escalar lineal hiperbólica:

(9.8) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + B u = f$$

A_j, B matrices $m \times m$ dep de x, t.

A_j simétrica, u vector dim m.

(9.8) → sist lineal hiperbólico simétrico.

Ej: ec de onda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

O sea: $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$ (usar $u_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$, $u_2 = \frac{\partial w}{\partial t}$)

El el caso $d=1$ (1 dimensión espacial), el sist (1.8) junto a BC y CI apropiadas, puede resolverse usando el método de las características. En este caso hay m características

$(x^i(t), t)$, $i=1,\dots m$ a través de c/ punto $\bar{x}$

que satisfacen las ecs:

$$\frac{dx^i}{dt} = \lambda_i(x^i, t) \qquad i=1,\dots m$$

donde $\lambda_i(x,t)$ son los autovalores de $A_1(x,t)$

(A_1 dimensión m ~~D~~); problema:

$$\dot{\underline{u}} + \underline{\underline{A}}_1 \underline{u}' + \underline{\underline{B}} u = f \qquad (\underline{\underline{B}} = 0?)$$

$\underline{\underline{B}}=0$, $f=0$: $\dot{u} + A_1 u' = 0$

$$A_1 v = \lambda v \Rightarrow \lambda = v^T A_1 v$$

$$\left.\begin{array}{l} u = v\,y \\ \dot{u} = v\,\dot{y} \end{array}\right\} \underbrace{v^T v}_{1}\,\dot{y} + \lambda\, y' = 0$$

En realidad:

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial y_i}{\partial x} = 0 \qquad i=1,\dots m$$

Sea $x^i / \frac{dx^i}{dt} = \lambda_i \Rightarrow$ sobre c/ característica:

$$\frac{D}{Dt} y_i(x(t)) = 0 \qquad i=1,\dots m$$

$u = v\,y$: ~~$\frac{D}{Dt}\underline{u}(x(t)) = 0$ sobre $x^i(t)$~~

~~$\therefore \frac{D}{Dt}\underline{u}(x(t)) + \underline{\underline{B}}u = f$ sobre $x^i(t)$, $i=1,\dots m$~~

~~(m ecs ordinarias de dimensión m)~~

$$\underline{u} = \sum_{i=1,\dots m} \underline{v}^i y_i \quad \text{con } y_i \text{ sol de } \dot{y}_i(x(t)) = 0 \text{ sobre } x^i(t)$$

los términos difusivo y ~~fuente~~ carga:

$$b_i = \underline{v}_i^T \underline{\underline{B}}\, \underline{v}_i \qquad \left(\text{asumimos } \underline{\underline{B}} \;/\; \text{diagonaliza simultáneamente}, \text{ o sea: } v_i^T B v_j = b_i \delta_{ij} \right.$$

$$f_i = v_i^T f \qquad \left. (\text{Laughey, etc}) \right)$$

y logramos:

$$\underline{\dot{y}_i + b_i y_i = f_i} \qquad \text{sobre } x^i(t)$$

$i = 1, \dots m$

(9.3) Métodos numéricos p/ecs hiperbólicas. Generalidades:

Métodos comunes p/ hiperbólicas:

- Características
- Diferencias finitas
- Elementos Finitos

<u>Características</u>: p/ecs escalares lineales en varias dimensiones espaciales y para sistemas lineales en 1 dimensión espacial.

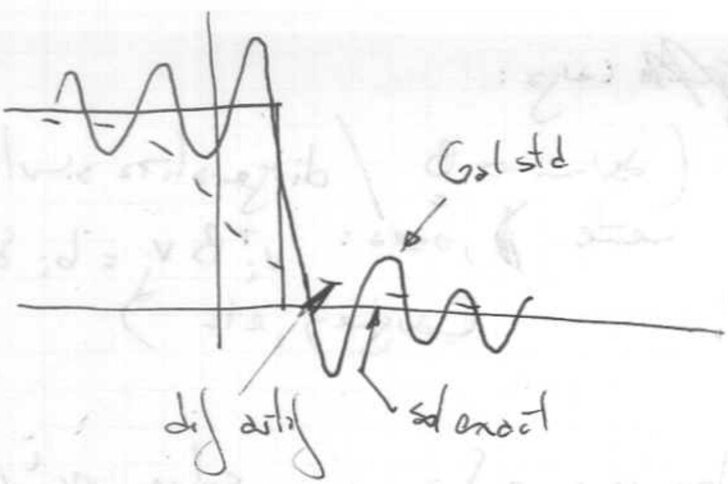
1°) Resolver ec de la característica

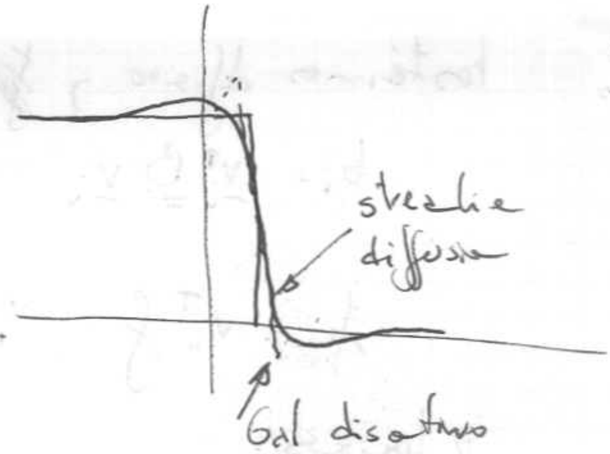
2°) Integrar a lo largo de ésta una EDO

No es fácil de usar en práctica, sobre todo p/ un sistema. Se complica + aún en sistemas mixtos hip/parab.

<u>Dif Finit/Ele Fin</u>: Se adapta mejor p/casos "complicados". Usan (en principio) <u>malla fija</u>, facilitando programación.

<u>Contra</u>: aparecen dificultades numéricas si la solución exacta no es suave → ejemplo "salto" a través de una característica. En este caso EF o DF convencional produce soluciones aproximadas que oscilan (Galerkin std o dif finitas centradas) o suaviza demasiado un frente abrupto (difusión artificial clásica)





Luego, los métodos convencionales tienen problemas de inestabilidad o de precisión. Desarrollamos los métodos streamline diffusion y Galerkin discontinuo que poseen al mismo tiempo precisión de alto orden y buena estabilidad.

(9.1) Preliminares

Consideramos sistemas de la forma:

$$(9.9)\quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta u) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = f \qquad (x,t) \in \Omega \times I$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega$$

y el análogo estacionario:

$$(9.10)\quad \operatorname{div}(\beta u) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

$I = (0,T)$, σ, $\varepsilon \geq 0$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ funciones suaves de (x,t) ó x.

Asumimos:

$$(9.11)\quad \tfrac{1}{2} \operatorname{div}\beta + \sigma \geq \alpha \quad \text{en } \Omega \times I$$

con α cte ≥ 0 ($\alpha > 0$ en el caso estacionario)

Esta condición asegura estabilidad ~~en el caso estacionario~~ de (9.9), (9.10) $\forall \varepsilon \geq 0$ (para $\varepsilon > 0$, (9.11) podría ser relajada)

BC: Dirichlet, Neumann o Robin (3º tipo)

Por simplicidad, consideramos 2 problemas modelo c/ coeficientes constantes y condiciones Dirichlet, 1 estacionario, el otro dependiente tiempo.

Veremos los métodos EF siguientes:

- A Galerkin Std
- B Galerkin + dif artificial clásica
- C Difusión p/ líneas de corriente
- D Galerkin discontinuo
- E Difusión p/ líneas de corriente discont en el tiempo

A, B, C $\rightarrow$ ecs mixtas elípt/hiperb de la forma (9.10) con ε pequeño

D $\rightarrow$ problemas hiperbólicos puros (9.9) y (9.10) c/ $\varepsilon = 0$

E $\rightarrow$ probl dep tiempo (9.9) c/ $\varepsilon > 0$.

<u>Problemas modelo</u>:

1) Ω dominio poligonal convexo acotado en $\mathbb{R}^2$ c/ frontera Γ

$\beta = (\beta_1, \beta_2)$ vector constante c/ $|\beta| = 1$.

$$(9.12) \qquad \begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + u_\beta + u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

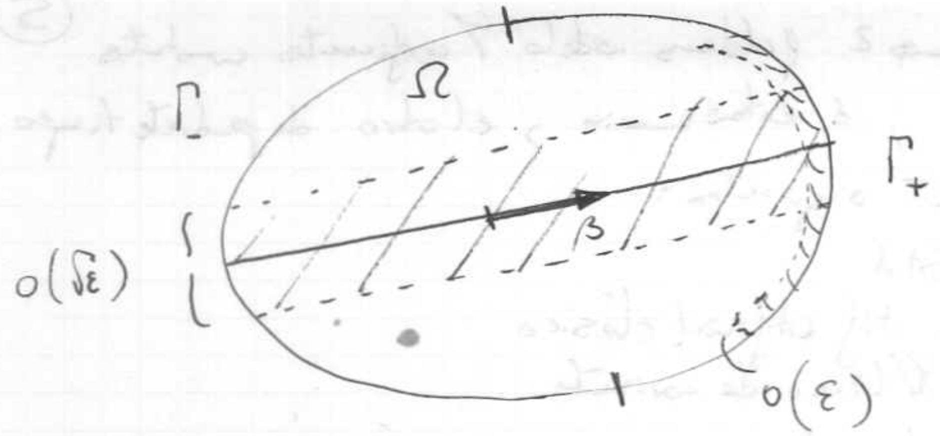
$\varepsilon > 0$, $v_\beta = \beta \cdot \nabla v$ (derivada en la dirección β).

<u>Problema reducido corresp</u>: $\varepsilon = 0 \Rightarrow$

$$(9.13) \qquad \begin{aligned} u_\beta + u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma_- \end{aligned}$$

con Γ_- frontera entrante: $\Gamma_- = \{x \in \Gamma \,/\, n(x) \cdot \beta < 0\}$

Las características del prob reducido son líneas rectas paralelas a β. Nótese además que en el prob reducido sólo se impone valores en la frontera Γ_-.



Si se realiza la regularidad de las soluciones exactas de (9.12) y (9.13) se observa:

(i) La solución de (9.13) puede ser discontinua (con un salto) a través de una característica, si los datos de frontera g son discontinuos (por ejemplo)

(ii) En el problema completo (9.12), con $\varepsilon > 0$, la solución es continua en Ω, y el salto va a ser "suavizado" ("dispersado") en una región de ancho $o(\sqrt{\varepsilon})$ en torno a la característica. Esta región estrecha, donde u (o derivadas de u) cambian rápidamente, se llama layer (capa) ("internal layer")

Si los valores alcanzados por u en el problema reducido sobre la frontera de salida $\Gamma_+ = \Gamma \setminus \Gamma_-$ no coincide con el valor especificado g del problema completo, luego se formará una capa límite (boundary layer) en Γ_+.
El ancho de esta capa es $o(\varepsilon)$.

2.) (Problema modelo no estacionario ~~dependiente del tiempo~~) Sea $\mathcal{I} = (0,1)$ un intervalo ~~de tiempo~~ espacial, $I = (0,T)$ un intervalo de tiempo y $\Omega = \mathcal{I} \times I$. Luego, el prob. es:

$$u_t + u_x - \varepsilon u_{xx} = f \qquad \text{en } \Omega$$

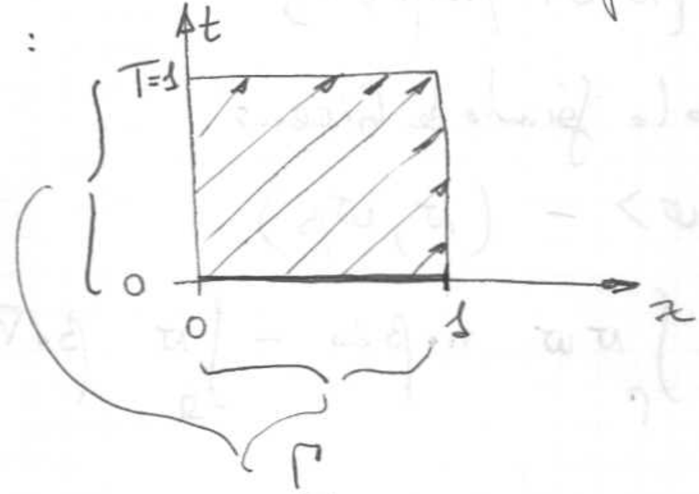
$$(9.14) \qquad u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \mathcal{I}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \qquad x = 0,1, \; t \in I$$

y el prob reducido correspondiente:

$$(9.15)\quad \begin{aligned} u_t + u_x &= f && \text{en } \Omega \\ u(x,0) &= u_0(x) && x \in J \\ u(0,t) &= g(t) && t \in I \end{aligned}$$

Claramente, (9.15) (salvo por el término u) tiene la misma forma que (9.13). Las características de (9.15) son líneas rectas en el plano (x,t) con dirección $(1,1)$ y la frontera de entrada está dada por los puntos (x,t) con $x=0$ ó $t=0$:



Notación:

En los prob estacionarios (9.12) y (9.13) usaremos la sig notación:

$$(v,w) = \int_\Omega v\,w \, dx$$

$$(\nabla v, \nabla w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx$$

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$\|v\|_s = \|v\|_{H^s(\Omega)} =$$

COMPLETAR

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Gamma} v \, w \; n \cdot \beta \; ds$$

$$\langle v, w \rangle_{-} = \int_{\Gamma_{-}} v \, w \; n \cdot \beta \; ds$$

$$\langle v, w \rangle_{+} = \int_{\Gamma_{+}} v \, w \; n \cdot \beta \; ds$$

$$|v| = \left(\int_{\Gamma} v^2 \; |n \cdot \beta| \; ds \right)^{1/2}$$

donde $\Gamma_{+} = \Gamma \setminus \Gamma_{-} = \{ x \in \Gamma \, / \, n \cdot \beta \geq 0 \}$

~~Por Fórmula de Green~~ Usando la fórmula de Green:

$$(v_{\beta}, w) = \langle v, w \rangle - (v, w_{\beta})$$

$$\int_{\Omega} \beta \cdot \nabla v \; w \; d\Omega = \int_{\Gamma} v \, w \; n \cdot \beta \, ds - \int_{\Omega} v \; \beta \cdot \nabla w \; d\Omega$$

M
O
S
T
R
A
R

Sea además (T_h) una familia de triangulaciones casi uniformes $T_h = \{K\}$ de Ω, con tamaño de malla h que satisface condición de ángulo mínimo. Para un entero positivo r, introducimos el espacio de elementos finitos:

$$V_h = \{ v \in H^1(\Omega) \,/\, v|_K \in P_r(K) \quad \forall K \in T_h \}$$

(i.e. V_h es el espacio de funciones polinomiales continuas a trozos de grado r) Por teoría de aproximación, se muestra que $\forall u \in H^{r+1}(\Omega)$, $\exists$ un interpolante $\tilde{u}^h \in V_h$ /

ESTIMACIONES ÓPTIMAS

$$(9.16\,a) \qquad \| u - \tilde{u}^h \| \leq C h^{r+1} \|u\|_{r+1}$$

$$(9.16\,b) \qquad \| u - \tilde{u}^h \|_1 \leq C h^{r} \|u\|_{r+1}$$

Más aún, si las derivadas de u de orden $r+1$ están acotadas en Ω, luego:

$$|u - \tilde{u}^h|_\infty \leq C h^{r+1} \|u\|_{r+1}$$

y con algunos requerimientos menos de regularidad, se muestra

$$(9.16\,c) \qquad |u - \tilde{u}^h| \leq C h^{r+1/2} \|u\|_{r+1}$$

ANALIZAR Y COMPROBAR

Usaremos también la desigualdad:

$$2ab \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ $\qquad (\varepsilon^2 a^2 - 2\varepsilon a b + b^2 \ge 0)$

9.5) Galerkin standard:

Consideramos primero el método Galerkin std p/el prob. estacionario (9.12) c/ $\varepsilon > 0$. Por simplicidad, asumimos el dato de la frontera $g = 0$. P/este problema, podemos encontrar la forma variacional siguiente:

$\times$ Hallar $u \in H^1(\Omega)$ /

$$(9.17) \qquad \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (u_\beta + u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

(Ej: mostrar equivalencia c/ ec dif)

Sea el espacio de elementos finitos:

$$\mathring{V}_h = \{ v \in V_h \,/\, v = 0 \text{ sobre } \Gamma \}$$

Luego, el método standard de Galerkin p/(9.17) se escribe:

Hallar $u^h \in \mathring{V}_h$ /

$$(9.18) \qquad \varepsilon(\nabla u^h, \nabla v) + (u^h_\beta + u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathring{V}_h$$

Este método se comporta bien si $\varepsilon \ge h$, pero si $\varepsilon \ll h$ puede producir soluciones oscilantes que no aproximan la solución exacta. (Ver ejemplo siguiente)

Ejemplo 9.1: Sea el problema de valores de frontera

$$-\varepsilon u_{xx} + u_x = 0 \qquad 0<x<1$$

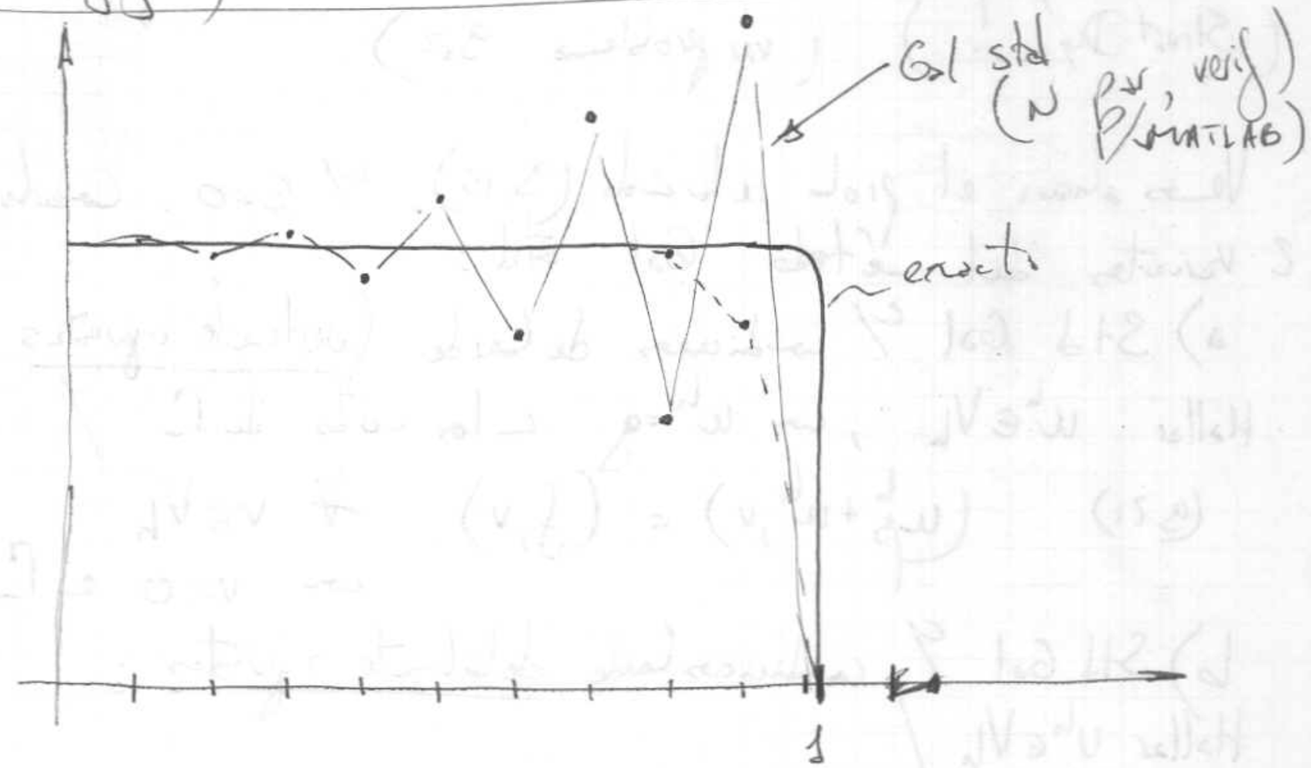
(9.19) $u(0)=1$
$u(1)=0$

con $0<\varepsilon\ll 1$. La solución exacta es:

$$u(x) = a\left(1-e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}}\right)$$

con $a = \left(1-e^{-1/\varepsilon}\right)^{-1}$

Para $\varepsilon\ll 1$, $u(x)$ es próxima a 1 salvo en una capa en $x=1$ de ancho $O(\varepsilon)$ donde u cae de 1 a 0. (Ver figura)



$\varepsilon = .01 \quad h = 0.1$

Si aplicamos Galerkin std y funciones lineales a trozos, y malla uniforme de long h, obtenemos el sist de ecuaciones

$$-\frac{\varepsilon}{h^2}\left[U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}\right]+\frac{1}{2h}\left[U_{i+1}-U_{i-1}\right]=0 \qquad i=1,\dots N-1$$

(9.20)

$$U_0=1 \qquad U_N=0$$

(9.20) puede verse tbién como una aprox p/ dif finitas. Si N es impar y ε pequeño, la solución U_i es approx igual a 0 para i impar e igual a 1 para i par, y obtenemos una solución osilante en todo el dominio. ∎

Resumiendo, std Gal produce sol osilante si $\varepsilon < h$ y la sol exacta no es suave. Sin embargo, si la sol exacta es suave, std Gal da buenos resultados aún para $\varepsilon < h$. (Strvot Dym!) (ver problema 9.2).

Veamos ahora el prob reducido (9.13) c/ $\varepsilon = 0$. Consideramos 2 variantes del método Gal std:

a) Std Gal c/ condiciones de borde fuertemente impuestas.

Hallar $u^h \in V_h$, con $u^h = g$ en los nodos de Γ_- /

(9.21) $$(u^h_\beta + u^h, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in V_h$$
con $v = 0$ en Γ_-

b) Std Gal c/ condiciones borde debilmente impuestas:

Hallar $u^h \in V_h$ /

(9.22) $$(u^h_\beta + u^h, v) - \langle u^h, v\rangle_- = (f,v) - \langle g, v\rangle_- \quad \forall\, v \in V_h$$

Analizamos el método (b) (9.22) (El (a) → ejercicio 9.3)

Introducimos la notación:

$$b(w,v) \triangleq (w_\beta + w, v) - \langle w, v\rangle_-$$
$$l(v) = (f,v) - \langle g, v\rangle_-$$

Luego, podemos escribir (9.22) en la forma: Hallar $u^h \in V_h$ t.q.

$$(9.23) \qquad b(u^h, v) = l(v) \qquad \forall\, v \in V_h$$

Como la sol exacta satisface (9.13), tenemos (ejercicio → verificar)

$$b(u,v) = l(v) \qquad \forall\, v \in V_h$$

(es válido $\forall v \in H^1$)

Haciendo la diferencia: error $= u - u^h$

$$(9.24) \qquad b(u-u^h, v) = b(e,v) = 0 \qquad \forall\, v \in V_h$$

Antes de ver la estabilidad planteamos el sig. Lema:

<u>Lema 9.1</u> $\forall\, v \in H^1(\Omega)$ tenemos

$$b(v,v) = \|v\|^2 + \tfrac{1}{2}|v|^2$$

D) Por la fórmula de Green:

$$(v_\beta, v) = -(v, v_\beta) + \langle v, v\rangle$$

o sea:

$$(v_\beta, v) = \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle = \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle_- + \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle_+$$

Luego:

$$b(v,v) = (v_\beta + v, v) - \langle v,v\rangle_- = \|v\|^2 + \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle_- + \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle_+ - \langle v,v\rangle_-$$

$$b(v,v) = \|v\|^2 + \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle_+ - \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle_-$$

Recordando:

$$\langle v, w\rangle_{\mp} = \int_{\Gamma_{\mp}} v\, w \;\; n\cdot\beta \;\; ds$$

y $$|v|^2 = \int_{\Gamma} v^2 \;\; |n\cdot\beta| \;\; ds$$

y siendo $n\cdot\beta \begin{cases} \geq 0 & \text{en } \Gamma_+ \\ < 0 & \text{en } \Gamma_- \end{cases}$

obtenemos $$\tfrac{1}{2}\langle v, v\rangle_+ - \tfrac{1}{2}\langle v, v\rangle_- = \tfrac{1}{2}|v|^2$$

y por lo tanto

$$\underline{b(v,v) = \|v\|^2 + \tfrac{1}{2}|v|^2} \qquad \boxed{QED}$$

Notar además, que (9.22) es equivalente a un sistema de ecs lineales con igual número de ecs e incógnitas:

$$b(u^h, v_i) = l(v_i) \qquad \forall v / \{v_i\} \text{ base de } V_h$$

$$u^h = a_i v_i \Rightarrow b(v_j, v_i)\; a_j = l(v_i)$$

Por el lema anterior, $b(v_j, v_i) > 0$ (matriz def posit)

$\therefore\; \exists!\; a_j$, o sea $\exists!\, u^h / b(u^h, v) = l(v) \;\; \forall v \in V_h$

(Estimación de error)

Teo 9.1) $\exists$ una cte C / si u satisface (9.13) y $u^h \in V_h$ (pido que exista) es solución de (9.22), luego

(9.25) $$\|u-u^h\| + |u-u^h| \leq C\, h^r \|u\|_{r+1}$$

D) Sea $\tilde{u}^h \in V_h$ el interpolante de u /

(9.16)
$$\|u - \tilde{u}^h\| \leq C h^{r+1} \|u\|_{r+1}$$
$$\|u - \tilde{u}^h\|_1 \leq C h^r \|u\|_{r+1}$$

Escribimos $\eta^h = u - \tilde{u}^h$, $e^h = u^h - \tilde{u}^h$

$$e^h = u^h - \tilde{u}^h = \underbrace{u^h - u}_{-e} + \underbrace{u - \tilde{u}^h}_{\eta^h} = \eta^h - e$$

Por el Lema 9.1 y por [(9.24) $b(e,v) = 0$], tenemos:

$$\|e^h\|^2 + \frac{1}{2}|e^h|^2 = b(e^h, e^h) = b(\eta^h, e^h) - \underbrace{b(e, e^h)}_{0} =$$
(haciendo $v = e^h$ en 9.24)

$$= b(\eta^h, e^h) \underset{\text{def}}{=} (\eta^h_\beta, e^h) + (\eta^h, e^h) - \langle \eta^h, e^h \rangle = (*)$$

Usando: $(u,v) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\|u\|^2}{\varepsilon} + \|v\|^2 \varepsilon\right)$, $\varepsilon = 2$

$$(*) \leq \|\eta^h_\beta\|^2 + \frac{1}{4}\|e^h\|^2 + \|\eta^h\|^2 + \frac{1}{4}\|e^h\|^2 +$$
$$+ |\eta^h|^2 + \frac{1}{4}|e^h|^2 =$$
$$= \|\eta^h_\beta\|^2 + \|\eta^h\|^2 + |\eta^h|^2 + \frac{1}{2}\|e^h\|^2 + \frac{1}{4}|e^h|^2$$

Pero: $\|\eta^h_\beta\| + \|\eta^h\| + |\eta^h| \leq C h^r \|u\|_{r+1}$

$\therefore$

$$\|e^h\| + |e^h| \leq C h^r \|u\|_{r+1}$$

(Razonamiento: $\|e^h\|^2 \leq \|e^h\|^2 + |e^h|^2 \leq C h^{2r} \|u\|^2_{r+1}$
$\|e^h\| \leq C h^r \|u\|_{r+1}$ y $|e^h| \leq C h^r \|u\|_{r+1}$)
Luego sumar

Como $e^h = u^h - \tilde{u}^h$:

$$e = u - u^h = \eta^h - e^h$$

$$\|e\| + |e| = \|u - u^h\| + |u - u^h| \leq \|\eta^h\| + \|e^h\| +$$

$$+ |\eta^h| + |e^h| \leq C h^r \|u\|_{r+1}$$

Des Triang

$$\therefore \quad \boxed{\|u - u^h\| + |u - u^h| \leq C h^r \|u\|_{r+1}}$$

■

Esta estimación prueba que si la solución u (exacta) es suave / $\|u\|_{r+1}$ es finita $\Rightarrow$ Galerkin std converge con tasa $O(h^r)$. Esta tasa de convergencia estimada no es óptima, pero muestra que Gal std funciona si la sol es suave.

Por el contrario, cuando u no es suave, la estimación no nos dice nada, y se verifica que Gal std da malos ~~resultados~~.

OJO NO ESTÁ ACÁ EL PROBLEMA

NECESARIAMENTE

FALTA CONTROL SOBRE DERIVADAS

VER + ADELANTE

PROBLEMAS

(9.6) Difusión artificial clásica :

La manera más simple de evitar dificultades con Gal std, cuando $\varepsilon < h$, es evitar completamente la situación. O sea:

i) ~~disminuir~~ h hasta que $h < \varepsilon$

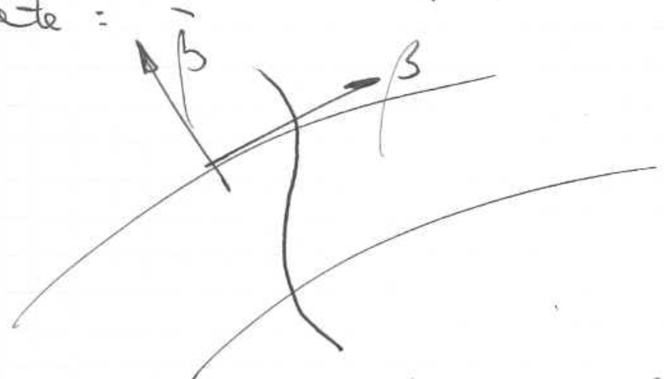
(~~[illegible]~~ poco práctico si ε es muy pequeño)

ii) Resolver un problema modificado con un término de difusión $-h\,\Delta u$ obtenido agregando $-\delta \Delta u$ a la ecuación, con $\delta = h - \varepsilon$ $\Rightarrow$ Método de difusión artificial clásica.

El método consiste en: Hallar $u^h \in \mathring{V}_h$ /

(9.26) $$h\left(\nabla u^h, \nabla v\right) + \left(u^h_\beta + u^h, v\right) = (f, v) \quad \forall\, v \in \mathring{V}_h$$

Este método da soluciones no oscilantes, pero tiene la desventaja de introducir demasiada difusión. En particular, aparece un término de difusión $-h\, u_{\bar\beta\bar\beta}$ actuando en dirección perpendicular a las líneas de corriente:



Este término tiende a suavizar los saltos a través de las líneas de corriente. Además, debido a que se añade $-\delta\Delta u$, el método tiene a lo sumo precisión de primer orden y el error es a lo sumo un $O(h)$, aún para soluciones suaves.

9.7) Streamline difussión method

(Difusión a lo largo de líneas de corriente)

Para eliminar las oscilaciones en Gal std, en el caso $\varepsilon < h$, es suficiente con añadir un término $-\delta u_{\beta\beta}$ con $\delta = h - \varepsilon$, o sea un término de difusión a lo largo de las líneas de corriente:

Hallar $u^h \in \mathring{V}_h$ /

$$(9.27) \quad \varepsilon(\nabla u^h, \nabla v) + \delta(u^h_\beta, v_\beta) + (u^h_\beta + u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathring{V}_h$$

Este método introduce menos difusión en la dirección $\bar{\beta}$, (a través de las líneas de corr), que el método dif art clásico. Pero, introduce una perturbación $o(h)$ en la solución del prob original.

Sin embargo, es posible introducir el término "mágico" $\delta(u^h_\beta, v_\beta)$ sin tal perturbación. Veremos primero cómo hacerlo cuando $\varepsilon = 0$.

9.7.1) Streamline diff c/ $\varepsilon = 0$

Empezamos a partir de Gal std (9.22) c/ BC impuestas en forma débil. Si reemplazamos la función de test $v \in V_h$ por $v + h v_\beta$, obtenemos el método de dif a lo largo de líneas de corr:

$$(9.28) \quad (u^h_\beta + u^h, v + h v_\beta) - (1+h)\langle u^h, v\rangle_- = (f, v + h v_\beta) - (1+h)\langle g, v\rangle_- \quad \forall v \in V_h$$

* (Se introdujo el factor $(1+h)$ en los términos de borde. Nótese que no afecta al desarrollo en (9.22))

* Nótese que aparece un término $h(u^h_\beta, v_\beta)$

* Nótese además que (9.28) es válido si reemplazamos u^h por la solución u de (9.13) (o sea el método es <u>consistente</u> con (9.13) y no introduce perturbación alguna $o(h)$ como los métodos anteriores (9.26) y (9.27)):

$$(u_\beta + u, v + h v_\beta) - (1+h)\langle u, v\rangle_- = (f, v + h v_\beta) - (1+h)\langle g, v\rangle_-$$

$v \in V_h$, u sol de (9.13):

$$u_\beta + u = f \quad \text{en } \Omega$$
$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma$$

$\therefore$ $(f, v + h v_\beta) - (1+h)\langle g, v\rangle_- = (f, v + h v_\beta) - (1+h)\langle g, v\rangle_-$

(Trivialmente)

Analizamos ahora el método (9.28) (Pregunta: consistencia OK oscilaciones?)

Introducimos la notación:

$$B(w,v) \triangleq (w_\beta + w, v + h v_\beta) - (1+h)\langle w, v\rangle_-$$
$$L(v) \triangleq (f, v + h v_\beta) - (1+h)\langle g, v\rangle_-$$

El método (9.28) puede formularse:

Hallar $u^h \in V_h$ /

$$B(u^h, v) = L(v) \qquad \forall v \in V_h$$

Más aún, la sol exacta de (9.13) verifica:

$$B(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

y por diferencia tenemos la ec de error siguiente:

$$(9.29) \qquad B(e,v) = 0 \qquad \forall v \in V_h$$

$$e = u - u^h$$

Probaremos que vale una estimación de error en la norma siguiente:

$$\|v\|_\beta = \left(h \|v\|_\beta^2 + \|v\|^2 + \frac{1+h}{2} |v|^2 \right)^{1/2}$$

¿Porqué elegir esta norma? Nos basamos en la sig propiedad de estabilidad de la forma bilineal B:

<u>Lema 9.2</u>: $\forall v \in H^1(\Omega)$ tenemos:

$$B(v,v) = \|v\|_\beta^2$$

D) Usando la fórmula de Green, tenemos

$$(v_\beta, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$$

Luego:

$$B(v,v) = (v_\beta + v, v + h v_\beta) - (1+h) \langle v, v \rangle_- =$$

$$= (v,v) + h(v_\beta, v_\beta) + (1+h)(v, v_\beta) -$$

$$-(1+h) \langle v, v \rangle_-$$

$$= \|v\|^2 + h\|v_\beta\|^2 + \left(\frac{1+h}{2}\right) \langle v, v \rangle - (1+h) \langle v, v \rangle_- =$$

$$= \frac{1+h}{2} \left(\langle v, v \rangle_+ - \langle v, v \rangle_- \right) + \|v\|^2 + h\|v_\beta\|^2 =$$

$$= \frac{1+h}{2} |v|^2 + \|v\|^2 + h\|v_\beta\|^2 = \|v\|_\beta^2$$

ver Lema (9.1) Recordar: $|v|^2 = \int_\Gamma v^2 |n \cdot \beta| \, ds$

QED

Veo ahora una estimación de error para (9.28):

Teor 9.2 $\exists$ una cte C / si u^h satisface (9.28) y u satisface (9.13), luego:

$$(9.30) \quad \|u-u^h\|_\beta \leq C h^{r+\frac{1}{2}} \|u\|_{r+1}$$

D] Sea $\tilde{u}^h \in V_h$ interpolante de u que satisface

$$\left.\begin{array}{l}\|u-\tilde{u}^h\| \leq C h^{r+1} \|u\|_{r+1} \\ \|u-\tilde{u}^h\|_1 \leq C h^r \|u\|_{r+1}\end{array}\right) (9.16)$$

Escribiendo nuevamente $\eta^h \hat{=} u - \tilde{u}^h$

$$e^h = u^h - \tilde{u}^h \quad \Rightarrow e = \eta^h - e^h = u - u^h$$

y usando el Lema (9.2) con $v = e \Rightarrow B(e,e) = \|e\|_\beta^2$

y (9.29) con $v = u^h - \tilde{u}^h \Rightarrow B(e, u^h - \tilde{u}^h) = 0$

obtenemos:

$$\|e\|_\beta^2 \underset{\text{Le 9.2}}{=} B(e,e) = B(e,\eta^h) - \underbrace{B(e,e^h)}_{=B(e,u-\tilde{u}^h)=0} = B(e,\eta^h) =$$

$$= (e_\beta + e, \eta^h + h\eta^h_\beta) - (1+h)\langle e,\eta^h\rangle_- =$$

$$= \underbrace{(e_\beta,\eta^h)}_{I} + \underbrace{(e,\eta^h)}_{II} + h\underbrace{(e_\beta,\eta^h_\beta)}_{III} + \underbrace{h(e,\eta^h_\beta)}_{IV} - \underbrace{(1+h)\langle e,\eta^h\rangle_-}_{V} = (*)$$

$$(a,b) \leq \frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|b\|^2 \qquad \varepsilon_I = h/2 \Rightarrow \quad \varepsilon_{IV} = \frac{1}{2h}$$

$$\varepsilon_{II} = 1/2 = \varepsilon_{III} \quad \varepsilon_V = \frac{1}{2}$$

$$(*) \leq \frac{h}{4}\|e_\beta\|^2 + \frac{1}{h}\|\eta^h\|^2 + \frac{h}{4}\|e_\beta\|^2 + h\|\eta^h_\beta\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\|e\|^2 + \|\eta^h\|^2 + \frac{1}{4}\|e\|^2 + h^2\|\eta^h_\beta\|^2 +$$

$$+ \frac{1+h}{4}|e|^2 + (1+h)|\eta^h|^2 =$$

14

$$= \frac{h}{2}\|e_\beta\|^2 + \left(\frac{1+h}{h}\right)\|\eta^h\|^2 + h(1+h)\|\eta^h_\beta\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1+h}{h}|e|^2 + (1+h)|\eta^h|^2$$

definición de $\|e\|_\beta^2 \Rightarrow$

$$= \frac{1}{2}\|e\|_\beta^2 + (1+h)\left[\frac{1}{h}\|\eta^h\|^2 + h\|\eta^h_\beta\|^2 + |\eta^h|^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\|e\|_\beta^2 + C_1 h^{2r+1}\|u\|^2_{r+1} + C_2 h^{2r+1}\|u\|^2_{r+1}$$

$+$

$$\therefore \|e_\beta\|^2 \leq C h^{2r+1}\|u\|^2_{r+1}$$

QED

<u>Nota</u> El método streamline diffusion tiene "estabilidad extra" respecto de Galerkin std en la dirección β.
(en este último, la forma bilineal $b(v,v)$ sólo domina las normas L_2 $\|v\|^2$ y $|v|^2$. En las pruebas del teorema (9.1) aparece la estabilidad $\|\eta^h_\beta\|$ (en tanto aquí está afectada por h, dando $1/2$ grado más de estabilidad)

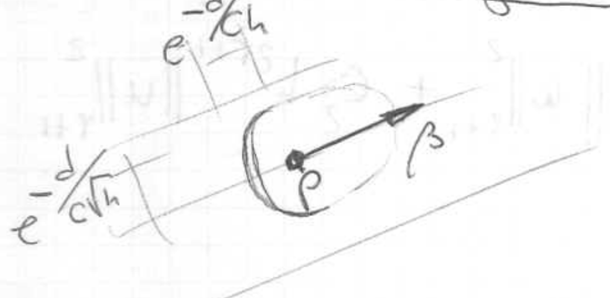
* La estimación de error (9.30) p/ streamline diffusion establece que

$$\|u-u^h\| \leq C h^{r+1/2}\|u\|_{r+1}$$

$$\|(u_\beta - u^h_\beta)\| \leq C h^r \|u\|_{r+1}$$

$\therefore$ La norma L_2 del error está a $h^{1/2}$ de ser óptima, mientras que ~~$h^{1/2}$~~ la norma L_2 de la derivada en la dirección β es óptima, Estas estimaciones indican que streamline diffusion (9.20) debe ser mejor que Galerkin std. (9.22) si la solución exacta fuera regular. Sin embargo no explican la mejora observada cuando la sol exacta no es regular.

La razón de la mejora de robustez se encuentra porque los efectos se propagan aproximadamente como en el caso continuo, o sea esencialmente a lo largo de las características:



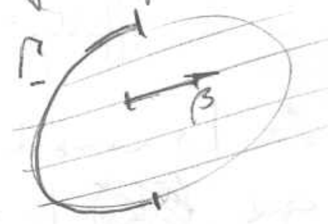
Se puede probar que un efecto en un punto $P \in \Omega$ decae tan rápidamente como $e^{\left(-d/c\sqrt{h}\right)}$ d: distancia al punto en la dirección $\bar{\beta}$ perpendicular a las características, y como $e^{-d/ch}$ en la dirección opuesta a las caracterís-ticas (dirección "upwind").

Esto significa que un salto en una característica va a estar limitado a un ancho $O(\sqrt{h})$ (incluso $O(h^{3/4})$).
En Galerkin std, los efectos se propagan en direcciones crosswind & upwind con muy poco amortiguamiento. (el decaimiento es igual en todas las direcciones)

Remark 9.3:

Nótese que P el problema continuo (reducido), con $g=0$ (por simplicidad)

$$u_\beta + u = f \quad \text{en } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_-$$



REVISAR

obtenemos la siguiente estimación de estabilidad:

$$|u| + \|u\| + \|u_\beta\| \le C\,\|f\|$$

P/ello:

I) $u_\beta + u = f \implies (u, u_\beta) + (u,u) = (u,f)$

Por Green: $(u, u_\beta) = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\underbrace{\langle u,u\rangle}_{|u|^2} + \underbrace{(u,u)}_{\|u\|^2} = (u,f) \le \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2 \quad ?$$

$$\implies |u| + \|u\| \le \|f\|$$

II) $u_\beta = f - u$

$$\therefore\quad \|u_\beta\| \le \|f\| + \|u\| \le C\,\|f\|$$

$$(I)+(II) \implies |u| + \|u\| + \|u_\beta\| \le C\,\|f\|$$

En el método streamline diffusion (9.28), la estimación de estabilidad que obtenemos, usando Lema (9.2): $\left(B(v,v) = \|v\|_\beta^2\right)$

$v = u^h \implies$

$$\|u^h\|_\beta^2 = B(u^h, u^h) = L(u^h) =$$

$$= (f, u^h + h\,u^h_\beta) = (f,u^h) + h\,(f, u^h_\beta) \le$$

por def c/g=0

$$\cancel{\le \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\left(\|u^h\|^2 + h\,\|u^h_\beta\|^2\right)} \le$$

$$\cancel{\le \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u^h\|_\beta^2}$$

(31)

$$\|u^h\|_\beta^2 \leq \|f\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u^h\|^2 + \frac{h}{2}\|f\|^2 + \frac{h}{2}\|u^h_\beta\|^2$$

$$\leq \frac{C}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\left(\|u^h\|^2 + h\|u^h_\beta\|^2\right) \leq$$

$$\leq \frac{C}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u^h\|_\beta^2$$

Notar que para poder aplicar esto (uso definición de $\|\cdot\|_\beta$)

$$\therefore \quad \|u^h\|_\beta^2 \leq C\|f\|^2$$

O sea:

$$|u^h| + \|u^h\| + \sqrt{h}\,\|u^h_\beta\| \leq C\|f\|$$

!

Vemos que esta estimación es más débil que la existente en el caso continuo, tiene menor control sobre la derivada a lo largo de la línea de corriente. Lo que ocurre, es que en el caso discreto no tenemos una ecuación análoga a $u_\beta = f - u$, y entonces no podemos inferir el control de $\|u^h_\beta\|$ a partir del de $\|u^h\|$.

En el método streamline diffusion, se introduce el control (parcial) de u^h_β en forma explícita a través de la función de prueba modificada $v + h v_\beta$. (Notar que en Gal std, la estimación de estabilidad sería $|u^h| + \|u^h\| \leq C\|f\|$, sin control de $\|u^h_\beta\|$. En este caso, sólo podemos

BUSCAR 7.d7, 7.51

garantizar:

$$\|u^h_\beta\| \le \frac{C}{h}\|u^h\| \le \frac{C}{h}\|f\|$$

usando una estimación inversa (ver 7.d7)

Sea T_h triangulación / $\exists\, \beta_1, \beta_2 > 0$, indep de $h = \max_{K\in T_h} h_K$, / $\forall K \in T_h$ $h_K \ge \beta_1 h$, $\delta_K / h_K \ge \beta_2$ (T_h quasiuniforme) Luego, $\exists\, C = f(\beta_i)$ / $a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \le C h^{-2} \|v\|^2$ $\forall v = \sum_{i=1}^{M_h} \eta_i \varphi_i \in V_h$

si $h \to 0 \Rightarrow \|u_\beta\| \to \infty$!

IR AL PROBLEMA, c/ $\varepsilon = 0$

(9.7.2) Método streamline diffusion con $\varepsilon > 0$

Empezamos del prob estacionario (9.12) c/ $g = 0$ y $h > \varepsilon > 0$:

$$-\varepsilon \Delta u + u_\beta + u = f \quad \text{en } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

($v_\beta = \beta \cdot \nabla v$)

Multiplicamos la 1° ecuación por la función de prueba $v + \delta v_\beta$, con $v \in H^1_0(\Omega)$ e integramos:

parámetro $\delta > 0$

$$\left(v + \delta v_\beta,\ -\varepsilon \Delta u + u_\beta + u\right) = \left(v + \delta v_\beta, f\right)$$

$$-\varepsilon\delta(\Delta u, v_\beta) - \varepsilon(\Delta u, v) + (v + \delta v_\beta, u_\beta + u) = $$
$$= (v + \delta v_\beta, f)$$

Integrando p/partes (Green):

$$(\Delta u, v) = \int v \,\Delta u \, d\Omega =$$
$$= \underbrace{\int_\Gamma v \,\nabla u \cdot n \, d\Gamma}_{0 \text{ pues } v \in H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega =$$
$$= -(\nabla v, \nabla u)$$

$$-\varepsilon\delta(v_\beta, \Delta u) + \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (u_\beta + u, v + \delta v_\beta) =$$
$$= (f, v + \delta v_\beta) \qquad (*)$$

Formulamos un análogo discreto de esta ecuación:

$$u \rightarrow u^h \in \mathring{V}_h$$

v restringimos a $\mathring{V}_h$

Recordar:

$$V_h = \{ v \in H^1(\Omega) / v|_K \in P_r(K) \quad \forall K \in T_h \}$$

$$\mathring{V}_h = \{ v \in V_h / \; v|_\Gamma = 0 \}$$

Para fijar u, v como las planteadas, se presenta el problema de cómo calcular:

$$(v_\beta, \Delta u^h)$$

? NO DEFINIDO PARA $u^h \in \mathring{V}_h$

Por extensión, definimos:

$$(\Delta u^h, v_\beta) \triangleq \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta u^h \, v_\beta \, d\Omega$$

Notar que las integrales ~~dentro de~~ / triángulo están bien definidas; de esta manera eliminamos el problema que se plantea en los contornos interelementos.

Formulamos ahora el siguiente método de streamline diffusion:

Hallar $u^h \in \mathring{V}_h$ /

$$(v_\beta, \Delta u) = (\nabla v \cdot \beta, \Delta u) = (\nabla v, \Delta u \, \beta)$$

$$(9.32) \quad \varepsilon(\nabla u^h, \nabla v) - \varepsilon\delta(\Delta u^h \beta, \nabla v) + (u_\beta + u^h, v + \delta v_\beta) =$$

$$= (f, v + \delta v_\beta) \quad \forall v \in \mathring{V}_h$$

donde i) $\delta = \bar{C} h$ si $\varepsilon < h$,
con $\bar{C}$ suficientemente pequeño (ver + adelante, Remark 9.21)

ii) $\delta = 0$ si $\varepsilon \geq h$

- Notar que la formulación es consistente, puesto que (9.32) es satisfecha para $u^h = u$, como se vió en (*)
- Los resultados de estimación de errores y estabilidad vistos p/el caso $\varepsilon = 0$ puede extenderse al método (9.32) p/ $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon < h$.

∴ El método propuesto permite construir soluciones aproximadas c/ buenas propiedades de estabilidad y convergencia.

<u>Remark 9.21</u>: Veamos una prueba de la estimación de estabilidad, mostrando que la presencia del término $-\varepsilon\delta(\Delta u^h, v_\beta)$ no deteriora la estabilidad extra aportada por $\delta(u^h_\beta, v_\beta)$ si la constante $\bar{C}$ es suficientemente pequeña.

Usando la estimación inversa (7.51), tenemos para $v \in \mathring{V}_h$:

(***) $$|\varepsilon\delta(\Delta v, v_\beta)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\delta C^2 h^{-2}\delta\|v_\beta\|^2$$

VER ATRAS

$$\left|\varepsilon\delta(\Delta v, v_\beta)\right| \underset{\text{Green}}{=} \left|\varepsilon\delta(\nabla v, \nabla v_\beta)\right| \overset{\text{desig con } \varepsilon=\delta^{2}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla v\|^2 + \frac{\delta^2\varepsilon}{2}\|\nabla v_\beta\|^2 \leq$$

$$\underset{\text{inversa}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla v\|^2 + \delta^2\frac{\varepsilon}{2} C^2 h^{-2}\|v_\beta\|^2$$

EXPLICAR, 7.47, 7.51

Luego, si definimos $B_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ ~~asociado a (9.32)~~:

$$B_\varepsilon(w,v) \overset{\Delta}{=} \varepsilon(\nabla w, \nabla v) - \varepsilon\delta(\Delta w\beta, \nabla v) + (w_\beta + w, v + \delta v_\beta)$$

obtenemos:

$$B_\varepsilon(v,v) = \underbrace{\varepsilon(\nabla v,\nabla v)}_{\varepsilon\|\nabla v\|^2} - \underbrace{\varepsilon\delta(\Delta v\,\beta, \nabla v)}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\delta C^2}{h^2}\|v_\beta\|^2} + \underbrace{(v_\beta + v, v + \delta v_\beta)}_{\delta\|v_\beta\|^2 + \|v\|^2 + (1+\delta)(v_\beta, v)}$$

Green: $(v_\beta, v) = \langle v, v\rangle - (v, v_\beta)$

$$(v_\beta, v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle = 0, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

$\therefore$

$$B_\varepsilon(v,v) \geq \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla v\|^2 + \underbrace{\left(\delta - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\delta^2 C^2}{h^2}\right)}_{\delta\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\delta C^2}{h^2}\right)}\|v_\beta\|^2 + \|v\|^2$$

Luego, haciendo $\bar{C}$ tan pequeño que:

$$\frac{\varepsilon\delta C^2}{h^2} = \frac{\varepsilon C^2 \bar{C} h}{h^2} \leq C^2\bar{C} < 1$$

$$\Rightarrow \bar{C} < 1/C^2$$

$\delta = \bar{C}h$

$$\therefore \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\delta C^2 \varepsilon}{h^2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

luego:

$$B_\varepsilon(v,v) \geq \frac{1}{2}\left(\varepsilon\|\nabla v\|^2 + \delta\|v_\beta\|^2 + \|v\|^2\right) \quad \forall v \in \mathring{V}_h$$

---

que es el resultado de estabilidad buscado. ($\|u^h_\beta\|$ queda acotada por $B_\varepsilon(u^h,u^h)$, o sea por $\|f\|$)

- **Nota:** $\bar{C} < 1/C^2$ p/estabilidad, siendo C cte que proviene de la estimación inversa (**)

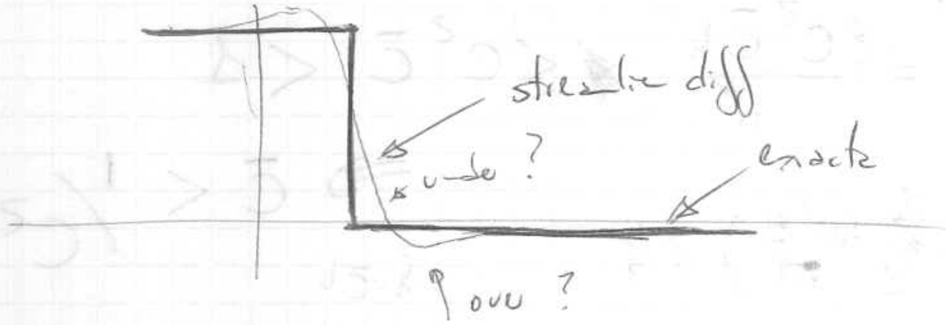
Remark 9.5: Si T_h no es uniforme, o si $|\beta|$ es variable, luego en (9.32) elegimos

i) $\delta = \bar{C}h_K/|\beta|$ sobre $K \in T_h$ si $\varepsilon < h_K|\beta|$

donde h_K es el diámetro de K

ii) $\delta = 0$ si $\varepsilon \geq h_K|\beta|$

Remark 9.6: Como se vio anteriormente el método de streamline diffusion capturará un salto de la solución exacta en una "capa numérica" fina. (thin numerical layer)
Sin embargo, dentro de esta capa se pueden producir "under-shoots u over-shoots suaves":

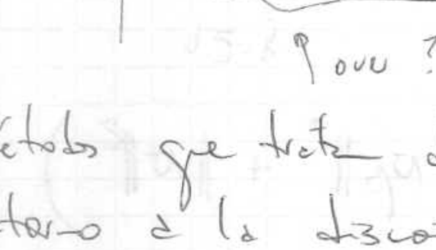


Existen métodos que tratan de disminuir aún más el error entorno a la discontinuidad. Ej: usando test-functions de la forma:

$$v + \delta\, \beta \cdot \nabla v + \bar{\delta}\, \bar{\beta} \cdot \nabla v$$

donde
$$\bar{\beta} = \frac{\beta \cdot \nabla u^h}{|\nabla u^h|} \nabla u^h$$

O sea $\bar{\beta}$ es la proyección de β sobre ∇u^h:



Como $\bar{\beta}$ depende de la solución discreta desconocida u^h, este método se vuelve no lineal, aún cuando el prob continuo es lineal.

Remark 9.7: El método streamline diffusion p/ (9.12) y (9.13) es obtenido por multiplicación p/ funciones de ~~pruebas~~ test de la forma $v + h v_\beta$, con $v \in V_h$.

Osea, que las fcs de ~~prueba~~ test usadas pertenecen a un espacio distinto del de fcs de prueba V_h donde buscamos la solución discreta u^h.
Este método, en el cual las fcs de test difieren de las de prueba, se llama Petrov – Galerkin.
(En Galerkin std, los esp de fcs de test y de prueba son los mismos)

PROBLEMAS:

9.9) Método streamline diffusion p/problemas de convección/difusión dependientes del tiempo:

Consideramos el problema:

(9.13) $$u_t + u_x - \varepsilon u_{xx} = f \quad \text{en } \Omega = \mathcal{I} \times I$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathcal{I}$$

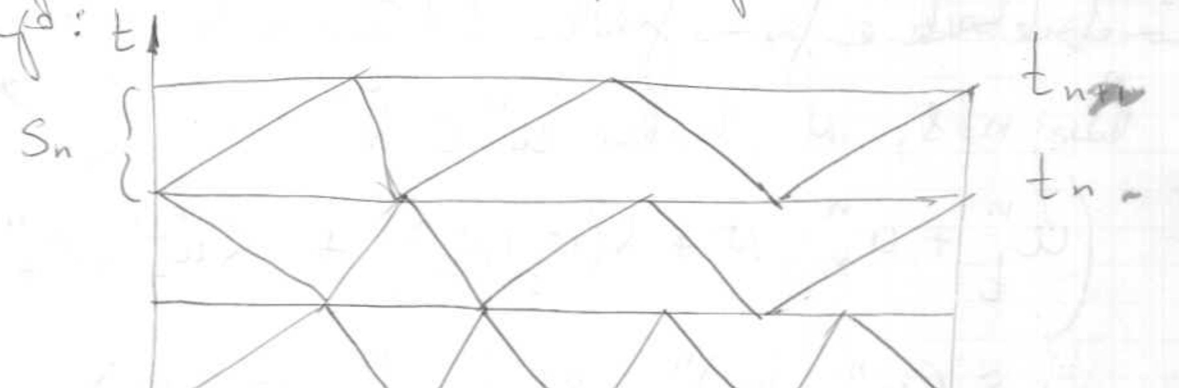
$$u(x,t) = 0 \quad x = 0,1 \quad t \in I$$

con $\varepsilon > 0$, y por simplicidad, BC / $x=0$.

Notar que debido a la presencia de u_{xx}, las fcs de prueba deben ser continuas en la variable espacial.

Usaremos elementos finitos espacio/tiempo, y buscaremos para calcular la solución discreta en forma sucesiva un instante después del otro (esquema de recurrencia).

Esto nos lleva a considerar un esquema c/ funciones de prueba continuas en el espacio, pero discontinuas en el tiempo:



Sea $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_N = T$ una subdivisión del intervalo de tiempo $I = (0,T)$. Sean las tiras S_n /

$$S_n = \{(x,t) : 0 < x < 1, t_{n-1} < t < t_n\}$$

para $n=1,\dots N$. Además, para cada n, sea V^n un subespacio de elementos finitos de $H^1(S_n)$ basado en una triangulación de la tira S_n con elementos de tamaño $h>\varepsilon$ y sea

$$\overset{\circ}{V}{}^n = \{ v \in V^n \, / \, v(x,t)=0 \quad \text{para } x=0,1 \}$$

(Notar que no es necesario que las diferentes tiras se conformen al pasar de un nivel de tiempo al otro, ver figura)

Aplicamos ahora el método streamline diffusion (9.32) en c/tira S_n del prob (9.43).

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Hallar } u^h \in \overset{\circ}{V}_h \, / \\ (9.32) \quad \varepsilon(\nabla u^h, \nabla v) - \varepsilon\delta(\Delta u^h_\beta, \nabla v) + (u^h_\beta + u^h, v + \delta v_\beta) = \\ \qquad = (f, v+\delta v_\beta) \\ \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{V}_h \end{array}}$$

Imponemos los valores iniciales en $t=t_{n-1}$ en forma débil y las cond de borde en forma fuerte. Obtenemos lo sig:

Para $n=1,\dots N$, hallar $u^n \in \overset{\circ}{V}{}^n$ / ?

$$\left(u^n_t + u^n_x, v + \delta(v_t+v_x)\right)^n + \langle u^n_+, v_+ \rangle^{n-1} +$$

$$+ \varepsilon(u^n_x, v_x)^n - \varepsilon\delta(u^n_{xx}, v_t+v_x) =$$

$$= \left(f, v+\delta(v_t+v_x)\right)^n + \langle u^{n-1}_-, v_+ \rangle^{n-1}$$

$$\forall\, v \in \overset{\circ}{V}{}^n$$

21

$$\cancel{-\varepsilon u_{xx} + u_x = 0}$$

$$\cancel{u(0) = 1}$$

$$\cancel{u(1) = 0}$$

$$\cancel{-\varepsilon (v, u_{xx}) + (v, u_x) = 0}$$

$$\cancel{\varepsilon (v_x, u_x) + (v, u_x) = 0}$$

9.13

$$u_\beta - \varepsilon u_{xx} = f \qquad \Omega = J \times I$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in J$$

$$u(x,t) = 0 \qquad x = 0,1 \qquad t \in I$$

$$\beta = [1, 1]$$

Aplicando (9.32): Multiplicamos la ec × $v + \delta v_\beta$:

$$\left(u_\beta - \varepsilon u_{xx},\ v + \delta v_\beta\right)^n = \left(f,\ v + \delta v_\beta\right)^n$$

Y agregamos la cond inicial en forma débil:

$$\left(u_\beta - \varepsilon u_{xx},\ v + \delta v_\beta\right)^n + \langle u_+^n, v_+^n \rangle^{n-1} =$$

$$= \left(f,\ v + \delta v_\beta\right)^n + \langle u_-^n, v_+^n \rangle^{n-1}$$

$$\forall v \in \mathring{V}^n$$

donde:

$$(w, v)^n = \int_{S^n} w v \, dx\, dt$$

$$\langle w, v \rangle^n = \int_0^1 w(x,t_n)\, v(x,t_n)\, dx$$

$$v_+(x,t) = \lim_{s \to 0^+} v(x,t+s)$$

$$v_-(x,t) = \lim_{s \to 0^-} v(x,t+s)$$

Trabajemos el 2º término:

$$\left(u_t^n + u_x^n,\ v + \delta(v_x + v_t)\right)^n -$$

$$- \underbrace{\varepsilon\left(u_{xx}^n,\ v + \delta(v_x + v_t)\right)^n}_{} +$$

$$+ \langle u_+^n, v_+ \rangle^{n-1} = \left(f,\ v + \delta(v_x + v_t)\right)^n + \langle u_-^{n-1}, v_+ \rangle^{n-1}$$

Int p/partes:

$$-\varepsilon\left(u_x^n, v_x\right)^n + \varepsilon\delta\left(u_{xx}^n,\ v_x + v_t\right)^n$$

$$\therefore \left(u_t^n + u_x^n,\ v + \delta(v_x + v_t)\right)^n + \varepsilon\left(u_x^n, v_x\right)^n -$$

$$- \underbrace{\varepsilon\delta\left(u_{xx}^n,\ v_x + v_t\right)^n}_{} + \langle u_+^n, v_+ \rangle^{n-1} =$$

$$= \left(f,\ v + \delta(v_x + v_t)\right)^n + \langle u_-^{n-1}, v_+ \rangle^{n-1}$$

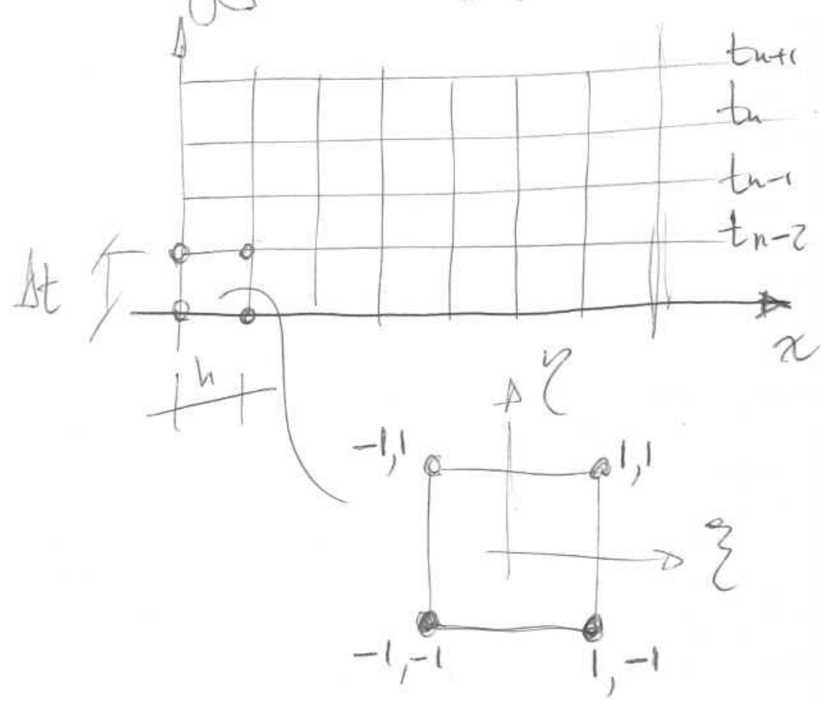
$$\forall\, v \in \mathring{V}^n$$

Defino como antes, elemento por elemento.

Vemos tenemos un sist de ecuaciones lineales p/ cada paso de tiempo $\Rightarrow$ esquema implícito

Sugerencia:

Usar elementos bilineales p/lograr un esquema de elementos a malla fija en $[0,1]$:



$$u(\xi,\eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}\,U_{1,1} + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}\,U_{-1,1} + \dots$$

Usar coordenadas fijas.