PROBLEMAS

9.5) Formular el método streamline diffusion para el problema (9.19):

$$-\varepsilon u_{xx} + u_x = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$(9.19) \qquad u(0) = 1$$

$$u(1) = 0$$

con $0 \le \varepsilon < 1$. Determinar los esquemas de diferencias en el caso funciones de prueba lineales por trozos y partición uniforme. Comparar en particular el caso con (9.20):

$$-\frac{\varepsilon}{h^2}\left[U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}\right] + \frac{1}{2h}\left[U_{i+1} - U_{i-1}\right] = 0 \qquad i = 1, \dots, N-1$$

$$U_0 = 1 \qquad U_N = 0$$

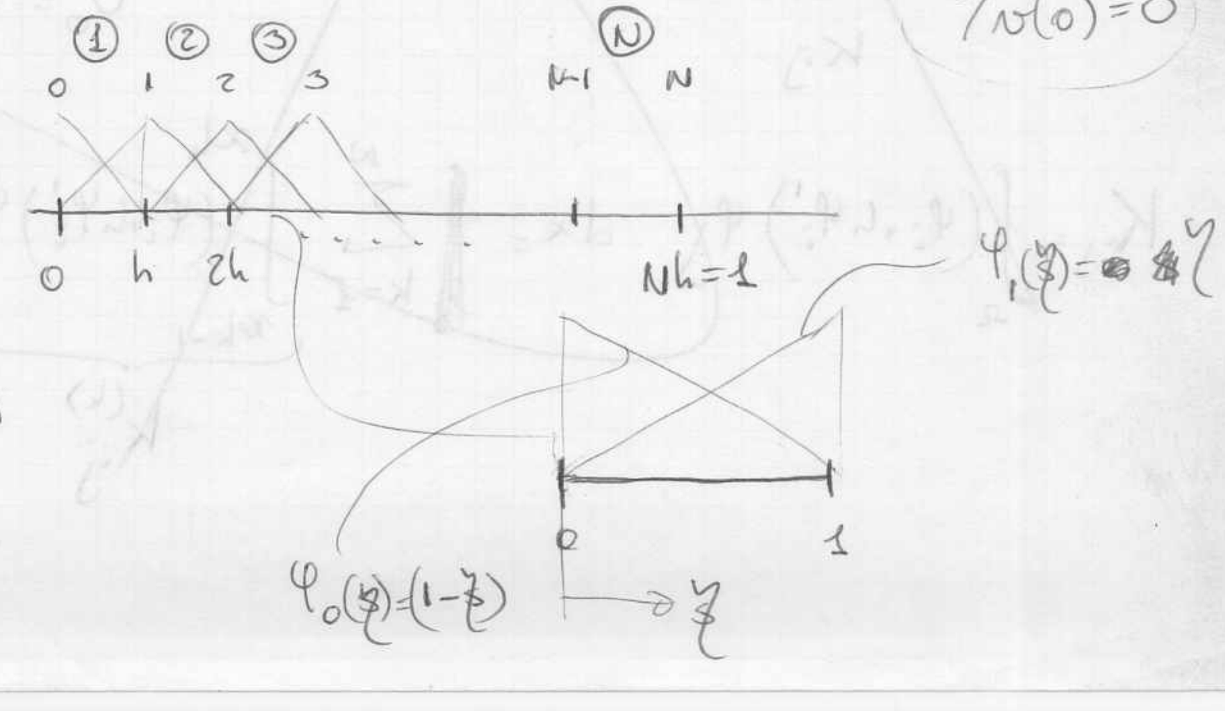
$\varepsilon = 0$]

$$u_x = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 1$$

Hallar $u^h \in V_h$ con $u^h(0) = 1$ /

$$\left(u_x, v + h v_x\right) = 0 \qquad \forall\, v \in V_h \;/\; v(0) = 0$$



$$u^h = U_{i-1}\underbrace{\left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)}_{\varphi_{i-1}(x)} + U_i\underbrace{\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}_{\varphi_i(x)}$$

$$u^h_x = -\frac{U_{i-1}}{h} + \frac{U_i}{h} \qquad \varphi'_{i-1} = -1/h \qquad \varphi'_i = 1/h$$

$$v^h / v^h(0) = 0 \iff v = \sum_{i=1}^{M} V_i\,\varphi_i(x)$$

$$v_x = \sum_{i=1,M} V_i\,\varphi'_i(x)$$

$$\cancel{(u_x, v + h v_x) = \int_\Omega u_x\, v\, dx + h \int}$$

$$(u_x, v + h v_x) = 0$$

$$\iff (\underbrace{u_x}_{\sum \varphi_j U_j}, \varphi_i + h\varphi'_i) = 0 \qquad i = 1, \dots m$$

$$\sum_{j=0,m} \underbrace{(\varphi_i + h\varphi'_i, \varphi'_j)}_{K_{ij}} U_j = 0 \qquad i = 1, \dots m$$

$$U_0 = 1$$

$$K_{ij} = \int_\Omega (\varphi_i + h\varphi'_i)\varphi'_j\, dx = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\varphi_i + h\varphi'_i)\varphi_j\, dx}_{K^{(k)}_{ij}} =$$

②

$$\cancel{K_{ij}^{(k)} = \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i \varphi_j \, dx + h \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i' \varphi_j \, dx}_{} =}$$

$$\cancel{\left[\int_{x_i}^{x_i+h} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)\left(\right.\right.}$$

$$x = x_{i-1} + \eta h$$

$$\left(u_x^h, v^h + h v_x^h\right) = \int_\Omega u_x^h \left(v^h + h v_x^h\right) dx =$$

$$= \sum_{K \in T_h} \int_K u_x^h \left(v^h + h v_x^h\right) dx = (*)$$

$$v^h = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i V_i \qquad v_x^h = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i' V_i$$

$$\therefore (*) = 0 \Rightarrow \sum_{K \in T_h} \int_K u_x^h \left(\varphi_i + h \varphi_i'\right) dx = 0$$

$$i = 1, \dots m$$

Ademas: $u^h = \sum_{j=0}^{m} \varphi_j U_j$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{K \in T_h} \underbrace{\int_K \left(\varphi_i + h \varphi_i'\right) \varphi_j' \, dx}_{(**)} \; U_j = 0$$

$$i = 1, \dots m$$

En c/elemento, debemos evaluar (**).
Hacemos el cambio de variable dentro del elemento (k)

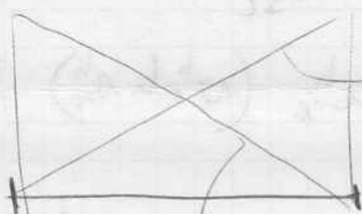
$$x \longrightarrow \eta \quad / \quad x = x_k + h\eta$$

$$\eta \in [0,1]$$

Luego: $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{d\varphi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{d\varphi}{d\eta} = \dfrac{\varphi^{(1)}}{h}$ ojo

$$dx = h\, d\eta$$

$$\int_{x_k}^{x_k+h} (\varphi_i + h\varphi_i')\varphi_j'\, dx = \int_0^1 \left(\varphi_i + \cancel{h}\frac{\varphi_i'}{\cancel{h}}\right)\frac{\varphi_j'}{\cancel{h}}\cancel{h}\, d\eta$$



$$\eta = \varphi_2 \qquad \varphi_2' = 1$$

$$\varphi_1 = 1-\eta \qquad \varphi_1' = -1$$

$$K_{11} = \int_0^1 (1-\eta-1)(1-\eta)\, h\, d\eta = +h\int_0^1 \eta^2 - \eta\, d\eta =$$

$$= h\left(\frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{h}{6}$$

$$K_{22} = \int_0^1 (\eta+1)(\eta)\, h\, d\eta = \frac{5}{6}h$$

$$K_{12} = \int_0^1 (-\eta)\,\eta\, h\, d\eta = -\frac{h}{3}$$

$$K_{21} = \int_0^1 \underbrace{(\eta+1)(1-\eta)}_{1-\eta^2}\, h\, d\eta = \left(1-\frac{1}{3}\right)h = \frac{2}{3}h$$

3

~~$(1-\xi)\xi\, h\, dx = \xi - \xi^2 = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$~~

$$K_{11} = \int_0^1 (1-\xi-1)(-1)\, d\xi = \frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$K_{12} = \int_0^1 (-\xi)(1)\, d\xi = -\frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \int_0^1 (1+\xi)(-1)\, d\xi = -\xi - \frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{3}{2}$$

$$K_{22} = \int_0^1 (1+\xi)\, 1\, d\xi = \frac{3}{2}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Matriz ensamblada:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ N \end{array}\left[\begin{array}{c|cccccc|c} -3/2 & 3/2+1/2 & -1/2 & & & & & \\ & -3/2 & 3/2+1/2 & -1/2 & & & & \\ & & -3/2 & 3/2+1/2 & -1/2 & & & \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & & -3/2 & 2 & -1/2 & \\ & & & & & -3/2 & 3/2 & \end{array}\right]$$

U_0

Se impone sólo U_0!

Sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & & & & \\ -3/2 & 2 & -1/2 & & & \\ & -3/2 & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots -1/2 & -1/2 \\ & & & & -3/2\ \ 2 & \\ & & & & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

OK, sólo se impone U_0 en Γ_-

$\varepsilon > 0$ | Hallar $u^h \in V_h$ / $\beta = 1$

$$\varepsilon(u_x^h, v_x^h) - \varepsilon\delta(u_{xx}^h, v_x^h) + (u_x^h, v^h + \delta v_x^h) = 0$$

$\forall v \in \mathring{V}_h$

$u^h(0) = 1$
$u^h(1) = 0$

Ojo (No hay función $v(1)$!)

i) $\delta = \bar{c}h$ si $\varepsilon < h$ $\bar{c}$ suf pequeño

ii) $\delta = 0$ si $\varepsilon \geq h$

Reescribo:

$$-\varepsilon\delta(u_{xx}^h, v_x^h) + (u_x^h, v^h + \delta v_x^h + \varepsilon v_x^h) = 0$$

si interp lineal $\Rightarrow u_{xx}^h = 0$

y obtengo
$$(u_x^h, v^h + (\delta + \varepsilon) v_x^h) = 0$$

Haciendo $\delta = h - \varepsilon \Rightarrow$ idem anterior (?)

Siguiendo los pasos del caso anterior:

$$K_{ij} = \int_{x_k}^{x_k + h_k} [\varphi_i + (\delta + \varepsilon)\varphi_i'] \varphi_j' \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\varphi_i + \left(\frac{\delta+\varepsilon}{h}\right)\varphi_i'\right] \frac{\varphi_j'}{J\cancel{h}}\, \cancel{h}\; d\xi$$

$$K_{11} = \int_0^1 -\left[1+\xi+\left(\frac{\delta+\varepsilon}{h}\right)\right]\cancel{(-1)}\; d\xi =$$

$$= \frac{\delta+\varepsilon-h}{h}\,\xi + \frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{\delta+\varepsilon}{h}$$

$$K_{12} = \int_0^1 \left[1-\xi-\frac{\delta+\varepsilon}{h}\right](1)\, d\xi = \frac{1}{2} - \frac{\delta+\varepsilon}{h}$$

$$K_{21} = \int_0^1 \left[\xi+\frac{\delta+\varepsilon}{h}\right](-1)\, d\xi = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\delta+\varepsilon}{h}\right)$$

$$K_{22} = \int_0^1 \left[\xi+\frac{\delta+\varepsilon}{h}\right](1)\, d\xi = \frac{1}{2} + \left(\frac{\delta+\varepsilon}{h}\right)$$

$$K^e = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + \frac{\delta+\varepsilon}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ensamble:

$$K = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N-1 \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2-1/2 & 1/2 & & & \\ & -1/2 & 1/2-1/2 & 1/2 & & \\ & & -1/2 & 0 & 1/2 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1/2 & 0 & 1/2 \\ & & & & & \end{bmatrix}
+ \frac{\delta+\varepsilon}{h}
\begin{bmatrix} -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & N-1 & N \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & N-1 \quad N \end{array}$$

(1) Método de Galerkin discontinuo

Los métodos de Galerkin c/ funciones de prueba continuas dan ecuaciones globalmente acopladas, o sea sistemas en los que el cambio de datos en un punto afectan la solución en todos los nodos. Esto es natural en problemas elípticos:

$$-\varepsilon\Delta u + u_\beta + u = f \qquad \varepsilon > 0$$
$$u = g$$

pero no así en el problema puramente hiperbólico, con $\varepsilon = 0$. En este caso sería más natural resolver el sistema por eliminación sucesiva empezando en la frontera de entrada Γ_-.

Construimos un MEF p/el problema reducido

$$u_\beta + u = f$$
$$u = g$$

que permite tal tipo de solución y tiene propiedades de estabilidad y convergencia similares a streamline difussion $\Rightarrow$ Galerkin discontinuo.

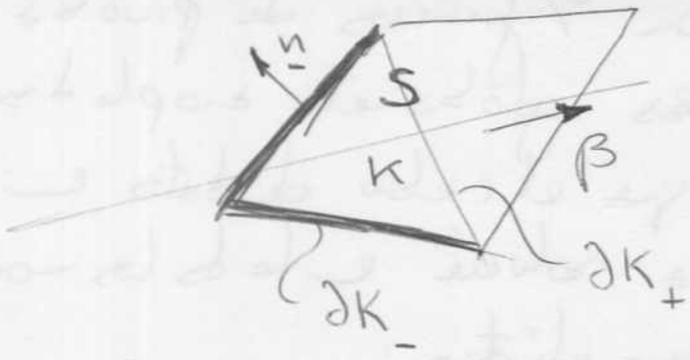
Se basa en el espacio de elementos finitos:

$$W_h = \{ v \in L_2(\Omega) \,/\, v|_K = P_r(K) \} \quad \forall K \in T_h$$

o sea, espacio de polinomios por tramos de grado $r \geq 0$, sin requisitos de continuidad entre fronteras interelementos.

Notación:

Sea $K \in T_h$, dividimos la frontera ∂K del triángulo



K en una parte de flujo entrante ∂K_- y otra flujo saliente ∂K_+

$$\partial K_- = \{ x \in \partial K : \underline{n} \cdot \underline{\beta} < 0 \}$$
$$\partial K_+ = \{ x \in \partial K : \underline{n} \cdot \beta \geq 0 \}$$

Además, supongamos S es una frontera común a dos triángulos K y K', y sea $v \in W_h$ que puede tener una discontinuidad de salto a través de S. Definimos los límites izq y derecho

$$v_-(\underline{x}) = \lim_{s \to 0^-} v(x + s\underline{\beta})$$
$$v_+(\underline{x}) = \lim_{s \to 0^+} v(\underline{x} + \underline{\beta})$$

y el salto:

$$[v] = v_+ - v_-$$

El método de Galerkin discontinuo puede formularse como: Hallar $u^h \in W_h$ / Para $K \in T_h$, dado u^h_- sobre ∂K_-, hallar $u^h \equiv u^h|_K \in P_r(K)$ /

$$(u^h_\beta + u^h, v)_K - \int_{\partial K_-} u^h_+ v_+ \underline{n} \cdot \underline{\beta} \, ds =$$

(9.33) $$= (f, v)_K - \int_{\partial K_-} u^h_- v_+ \underline{n} \cdot \underline{\beta} \, ds$$

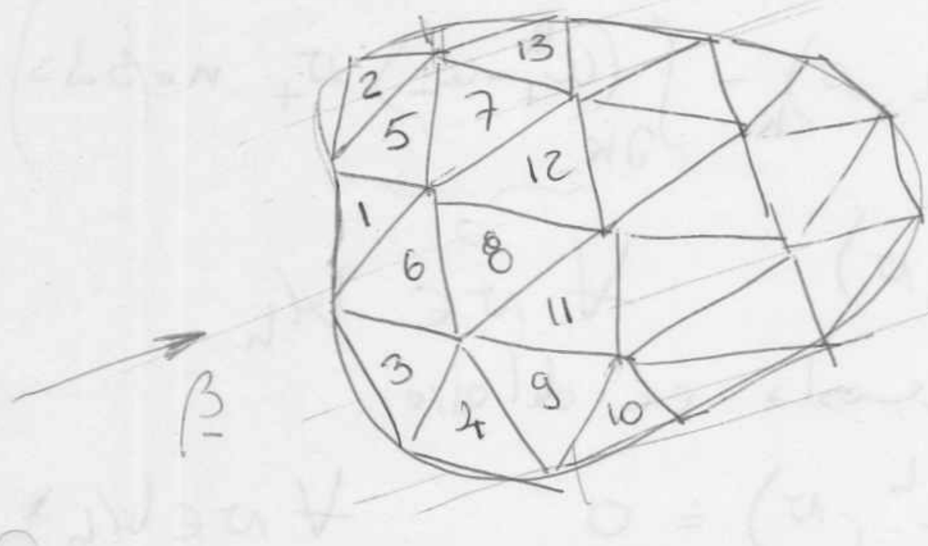
$$\forall v \in P_r(K)$$

2 donde $(w,v)_K = \int_K w\, v \, dx$

$u^h_- = g$ sobre Γ_-

Notar que (9.33) es un mét Galerkin std (9.22) con BC impuesta en forma débil, P/el caso de un único elemento ⟹ luego admite solución única.

O sea, si u^h_- está dado sobre ∂K_-, sabemos que $u^h|_K$ está determinado por (9.33).



Entonces podemos empezar calculando u^h en los triángulos K q $\partial K_- \in \Gamma_-$ pues allí está dado $u^h_- = g$.

Esto define u^h en los triángulos K que siguen y así hasta calcular u^h en todo el dominio.

Podemos escribir (9.33) en forma compacta:

$$B_K(u^h, v) = (f, v)_K \quad \forall v \in P_r(K)$$

con

$$B_K(w,v) = (w_\beta + w, v)_K - \int_{\partial K_-} [w]\, v_+ \, n \cdot \beta \, ds$$

Luego escribimos el mét Galerkin discont en la forma:

Hallar $u^h \in W_h$ / $B(u^h, v) = (f, v) \quad \forall v \in W_h$ (*)

donde $B(w, v) = \sum_K B_K(w, v)$

$(f, v) = \sum_K (f, v)_K$

y $u^h_- = g$ sobre Γ_-.

Claramente, la solución exacta satisface

$$B(u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in W_h$$

pues:

$$\sum_K \left((u_\beta + u, v)_K - \int_{\partial K_-} \underbrace{(u_+ - u_-)}_{0} v_+ \, n \cdot \beta \, ds \right) =$$

$$= (f, v) \qquad \forall v \in W_h$$

y entonces tenemos la ec. del error:

$$B(u - u^h, v) = 0 \qquad \forall v \in W_h$$

Veamos algunos ejemplos:

Ex 9.3) Sea el ~~[illegible]~~ problema 1-D ~~[illegible]~~:

$$\left| \begin{array}{ll} u_x + u = f & 0 < x < 1 \\ u(0) = g & \end{array} \right.$$

Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots\ x_N = 1$ una subdivisión del $I = (0,1)$ en subintervalos $I_j = (x_j, x_{j+1})$.

3 El met Galerkin discont se escribe en este caso:

Para $j = 0, 1, \dots N-1$, dado $u^h(x_j)_-$, hallar $u^h = u^h|_{I_j} \in P_r(I_j)$ /

$$\int_{I_j} (u^h_x + u^h)\, v \, dx + \left[u^h(x_j)_+ - u^h(x_j)_-\right] v(x_j)_+ = \int_{I_j} f v \, dx \quad \forall\, v \in P_r(I_j)$$

donde $v(x)_\pm = \lim_{y \to 0\pm} v(x+y)$

$$u^h(x_0)_- = g$$

En particular, si tenemos $r = 0$ (o sea u^h constante por tramos), logramos el método:

Hallar $U_j \equiv u^h(x_j)_-$ /

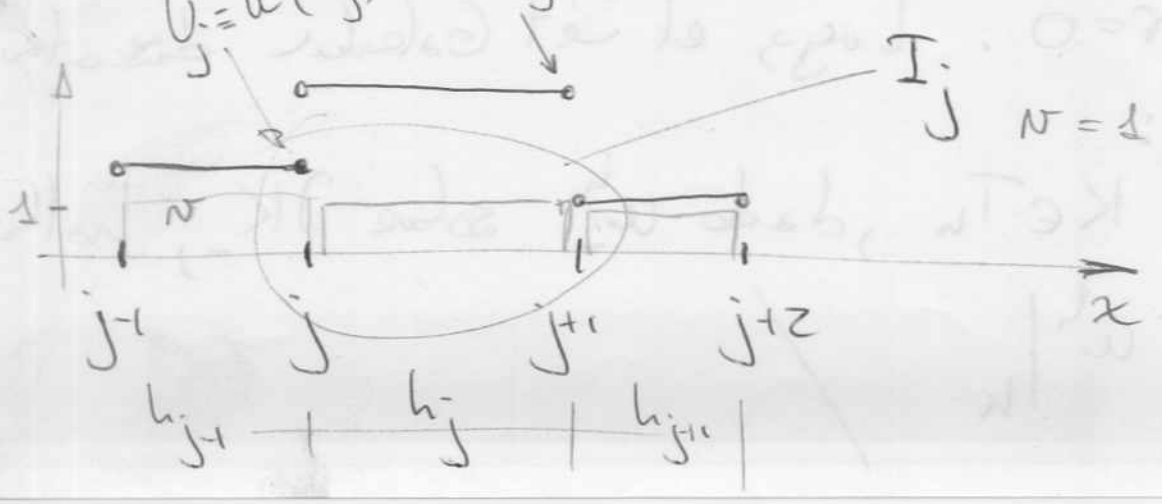
$$\frac{U_{j+1} - U_j}{h_j} + U_{j+1} = \frac{1}{h_j} \int_{I_j} f \, dx \qquad j = 0, \dots N-1$$

$$U_0 = g$$

VER 8/llegar a esto

$U_{j+1} \equiv u^h(x_{j+1})_- \equiv u^h(x_j)_+$

$U_j \equiv u^h(x_j)_-$



$$\int_{I_j} \Big(\underbrace{u^h_x}_{0} + \underbrace{u^h}_{U_{j+1}\cdot}\Big)\, v\, dx + \left[u^h(x_j)_+ - u^h(x_j)_-\right] \underbrace{v(x_j)_+}_{1} =$$

$$U_{j+1}\, h_j + U_{j+1} - U_j = \int_{I_j} f \, dx$$

$$\frac{U_{j+1} - U_j}{h_j} + U_{j+1} = \frac{1}{h_j}\int_{I_j} f\, dx$$

Notar que es coincidente con Euler backward!!
(o también upwind).

Ex 9.h) Sea la ecuación

$$\begin{aligned} u_\beta &= 0 && \text{en } \Omega \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma_- . \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} f=0, \\ \nexists u \end{matrix}\right)$$

Sea $r=0$. Luego, el mét Galerkin discontinuo resulta:

Para $K \in T_h$, dado u^h_- sobre ∂K_-, hallar

$U_K = u^h|_K$ /

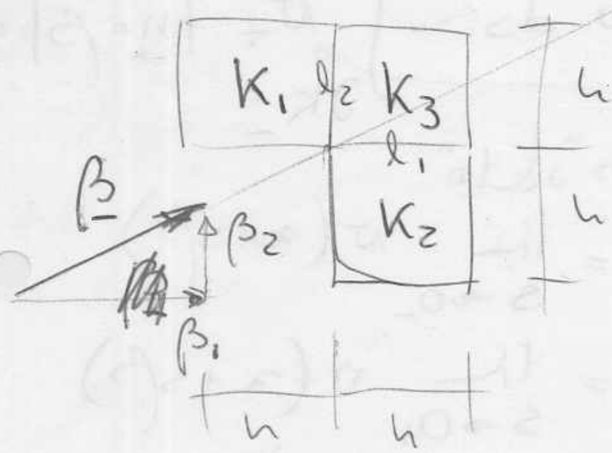
4

$$-\int_{\partial K_-} U_K \, n\cdot\beta \, ds = -\int_{\partial K_-} u_-^h \, n\cdot\beta \, ds$$

o sea:

$$U_K = \frac{\int_{\partial K_-} u_-^h \, n\cdot\beta \, ds}{\int_{\partial K_-} n\cdot\beta \, ds}$$

En otras palabras, el valor de U_K p/c/elemto K resulta el promedio ponderado (por $n\cdot\beta$) de los valores de u_-^h en los elementos vecinos con lados en ∂K_-. Por ejemplo:



$$U_3 = \frac{\int_{l_1} U_2 \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} ds + \int_{l_2} U_1 \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} ds}{\int_{l_1} \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} ds + \int_{l_2} \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} ds} =$$

$$U_3 = \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} U_2 + \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} U_1$$

Nuevamente logramos un esquema de dif finitas simple! (esquema upwind que relaciona puntos medios de los K_i)

Probaremos ahora una desigualdad de estabilidad del método de Galerkin discontinuo usando la norma

$$|v|_\beta^2 \triangleq \|v\|^2 + \frac{1}{2}\sum_K \int_{\partial K_-} [v]^2\, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds \; + \; + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} v_-^2\, \underline{n}\cdot\underline{\beta}\, ds$$

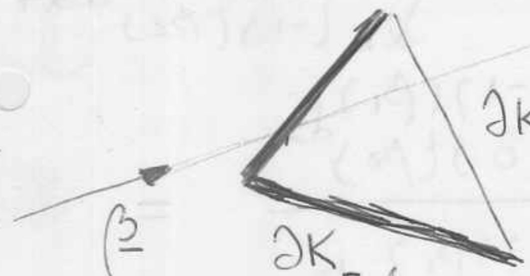
<u>Lema 9.3</u> Para toda función suave v $\overset{def}{\vee}$ por tramos tenemos:

$$B(v,v) = |v|_\beta^2 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_-} v_-^2\, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds$$

<u>Prueba</u> | usando la fórmula de Green:

$$2(v_\beta, v)_K = \int_{\partial K_+} v_-^2\, n\cdot\beta\, ds - \int_{\partial K_-} v_+^2\, |n\cdot\beta|\, ds$$

valores "adentro"



$$v_- = \lim_{s\to 0_-} v(x+s\beta)$$

$$v_+ = \lim_{s\to 0_+} v(x+s\beta)$$

luego:

$$2\Big(\sum_K (v_\beta+v, v)_K - \int_{\partial K_-} [v]\, v_+\, \underline{n}\cdot\underline{\beta}\, ds\Big) =$$

$$2B(v,v) = \sum_K \Big\{ \int_{\partial K_+} v_-^2\, \underline{n}\cdot\underline{\beta}\, ds - \int_{\partial K_-} v_+^2\, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds + 2\int_{\partial K_-} (v_+ - v_-)\, v_+\, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds \Big\} + 2\|v\|^2$$

Como todo lado de ∂K_+ coincide con un lado $\partial K'_-$ p/ un

5 efecto vecino K', excepto si $\partial K_+ \subseteq \Gamma_+$,
(y de necesariamente ocurre con $+$ y $-$ cambiados)
luego:

$$\sum_K \int_{\partial K_+} v_-^2 \, \overbrace{\underline{n}\cdot\underline{\beta}}^{>0}\, ds = +\sum_K \int_{\partial K_-} v_-^2 \, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds + \int_{\Gamma_+} v_-^2 \, \underline{n}\cdot\underline{\beta}\, ds - \int_{\Gamma_-} v_-^2 \, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds$$

Conclusión:

$$\cancel{2B(v,v) = \sum_K \left\{ \int_{\partial K_-} (v_+^2 - 2 v_- v_+ + v_-^2)\, |\underline{n}\cdot\underline{\beta}|\, ds \right.}$$

VER ATRAS

$$(v_\beta, v)_K = \int_K v_\beta \, v \, d\Omega = \int_K \beta\cdot\nabla v \, v \, d\Omega =$$

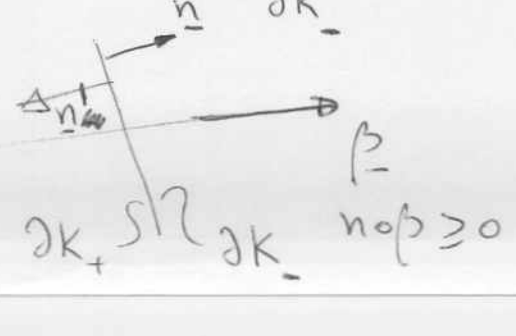
G
R
E
E
N

$$= \int_{\partial K} v^2 \, n\cdot\beta \, ds - \int v \, \beta\cdot\nabla v \, d\Omega =$$

$$2(v_\beta, v)_K = \int_{\partial K_-} v_+^2 (n\cdot\beta)\, ds + \int_{\partial K_+} v_-^2 (\underline{n}\cdot\underline{\beta})\, ds =$$

$$= \int_{\partial K_+} v_-^2 \, n\cdot\beta \, ds - \int_{\partial K_-} v_+^2 \, |n\cdot\beta|\, ds$$

$$\boxed{\int_{\partial K_+} v_-^2 \, n\cdot\beta \, ds = -\int_{\partial K'_-} v_-^2 \, \overbrace{\underline{n}'\cdot\underline{\beta}}^{<0}\, ds = \int_{\partial K'_-} v_-^2 \, |\underline{n}'\cdot\beta|\, ds}$$



Calcolo!

$$2B(v,v) = \sum_K \left\{ \int_{\partial K_-} v_-^2 |\underline{n}\circ\underline{\beta}| \, ds - \int_{\partial K_-} v_+^2 |n\circ\beta| \, ds \right.$$

$$\left. + 2\int_{\partial K_-} v_+^2 |n\circ\beta| \, ds - 2\int_{\partial K_-} v_- v_+ |n\circ\beta| \, ds \right\}$$

$$+ 2\|v\|^2 + \int_{\Gamma_+} v_-^2 \, \underline{n}\circ\underline{\beta} \, ds - \int_{\Gamma_-} v_-^2 \, \underline{n}\circ\underline{\beta} \, ds =$$

$$= \sum_K \left\{ \int_{\partial K_-} \overbrace{(v_+^2 - 2v_-v_+ + v_-^2)}^{[v]^2} |n\circ\beta| \, ds \right\} +$$

$$+ 2\|v\|^2 + \int_{\Gamma_+} v_-^2 \, \underline{n}\circ\underline{\beta} \, ds - \int_{\Gamma_-} v_-^2 \, \underline{n}\circ\underline{\beta} \, ds =$$

$$\therefore B(v,v) = |v|_\beta^2 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_-} v_-^2 \, \underline{n}\circ\underline{\beta} \, ds$$

QED

Sistemas de Friedrichs

Problema continuo

Extendemos streamline diffusion y Galerkin discontinuo al caso de sistemas hiperbólicos lineales de 1er orden (o sist Friedrichs). Sea pues el problema $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ c/ frontera Γ:

$$Lu = \sum_{i=1}^{d} \underline{\underline{A}}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Ku = F \quad \text{en } \Omega$$

$$(M-D)\, u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

A_i, K y M son matrices $m \times m$ función de $\underline{x}$. $\underline{u}$ es un vector dim m y:

$$D = \sum_{i=1}^{d} n_i \underline{\underline{A}}_i$$

con $\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix}$

vector normal,

Asumimos

$\underline{\underline{A}}_i$: simétricas, con coefs reales

$M+M^T$ positiva semidefinida sobre Γ

$$\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}}^T \geq 0$$

(8.26) $$\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}}^T - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \underline{\underline{A}}_i}{\partial x_i} \geq \bar{\sigma}\, \underline{\underline{I}} \quad \text{en } \Omega$$

$\bar{\sigma}$ cte ≥ 0

$$\operatorname{Ker}(D-M) + \operatorname{Ker}(D+M) = \mathbb{R}^m \quad \text{sobre } \Gamma$$

$E \geq F \iff E-F$ pos semidef

$$\operatorname{Ker} E = \{ \xi \in \mathbb{R}^m : E\xi = 0 \}$$

Bajo las condiciones (9.46) y $(\bar{\sigma} > 0)$ se puede probar que si $F \in [L_2(\Omega)]^m$, luego (9.45) admite solución única

carga

Muchos problemas de física y mecánica se escriben de esta forma:

Ej El problema reducido (homogéneo e isótropo)

$$u_\beta + u = f \quad \text{en } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_-$$

tiene la forma (9.45), con

$$m = 1 \qquad K = 1$$

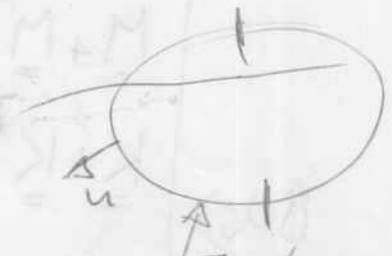
$$A_i = \beta_i \qquad D = \beta \cdot \underline{n}$$

$$M = |D|$$

$$\beta_i u_{,i} + 1\, u = f$$

$$\Big(\underbrace{|\beta\cdot n|}_{} - \underbrace{\beta \cdot n}_{}\Big) u = 0$$

>0 en Γ_-, 0 en Γ_+

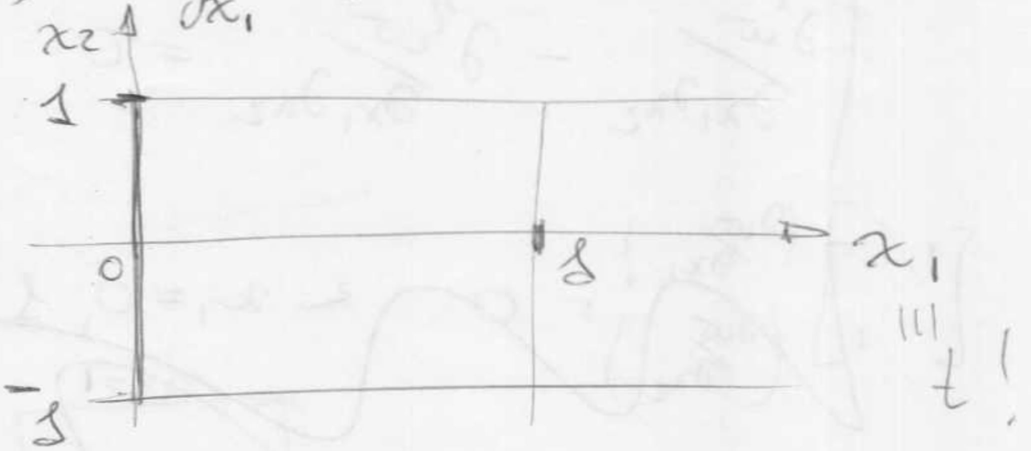


$\Gamma_- / \beta\cdot n < 0$

Ej 9.8 El prob de valores iniciales de Jordan para la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = f \qquad 0<x_1<1$$
$$|x_2|<1$$

$$w(x_1,-1) = w(x_1,1) = 0 \qquad 0<x_1<1$$
$$w(0,x_2) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(0,x_2) = 0 \qquad |x_2|<1$$



Situamos $\Omega = (0,1)\times(-1,1)$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad u_1 = \partial w/\partial x_1 \quad u_2 = \partial w/\partial x_2 \qquad \underline{F} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } x_1=0 \text{ ó } x_1=1$$

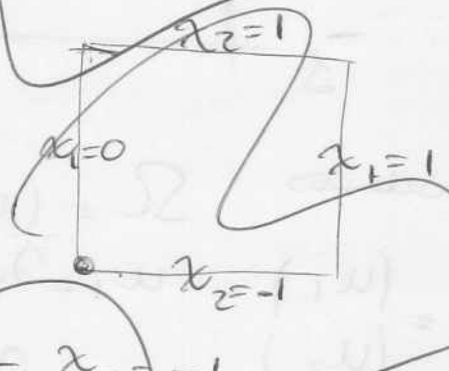
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ para } x_2=-1 \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ p/ } x_2=1$$

$$A_1 \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_2} + K u = F$$

$$I \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} \partial w/\partial x_1 \\ \partial w/\partial x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{pmatrix} \partial w/\partial x_1 \\ \partial w/\partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = f \\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial w/\partial x_1 \\ \partial w/\partial x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = 0, 1$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial w/\partial x_1 \\ \partial w/\partial x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = -1$$

$$(M - D)u = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \partial w/\partial x_1 \\ \partial w/\partial x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Introducimos los espacios:

$$\hat{V}_h = [V_h]^m$$

$$\hat{W}_h = [W_h]^m$$

con $V_h = \{ v \in H^1(\Omega) : v|_K \in P_r(K) \ \forall K \in T_h \}$

$$W_h = \{ v \in L_2(\Omega) : v|_K \in P_r(K) \ \forall K \in T_h \}$$

<u>Standard Galerkin</u>:

Hallar $u_h \in \hat{V}_h$ /

$$(Lu^h, v) + \frac{1}{2}\langle (M-D)u^h, v\rangle = (F, v) \quad \forall v \in \hat{V}_h$$

Generalizamos el Galerkin std, streamline, difusión a sist Friedrichs.

Notación:

$$(v, w) = \int_\Omega v \cdot w \, dx$$

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}$$

$$\langle v, w \rangle = \int_\Gamma v \cdot w \, ds$$

$$|v| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

Por Green:

$$\left(L v, w\right) = \left\langle D v, w \right\rangle + \left(v, L^* w\right)$$

donde

$$L^* = -\sum_{i=1}^{d} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + K^*$$

Osea, que en particular:

$$\left(L v, v\right) = \frac{1}{2}\left(\left(L + L^*\right) v, v\right) + \frac{1}{2}\left\langle D v, v \right\rangle$$

donde, usando (9.46):

$$L + L^* \geq \bar{\sigma} I$$