

Curso: Métodos Iterativos para la Solución de Grandes Sistemas de Ecuaciones Lineales y No Lineales

Guía Nro 2. Métodos Iterativos No Estacionarios Clásicos – Métodos basados en iterar sobre Espacios de Krylov

Rodrigo Paz, Mario Storti
Centro Internacional de métodos Computacionales en Ingeniería

24 de abril de 2007

Método de Gradientes Conjugados (CG) y Descenso Escalonado (Steepest Descent, SD) para sistemas simétricos, definidos positivos (*spd*).

Fecha entrega ejercicios 4-en adelante: 10/MAY/2007.

1. Si $f(x)$ es una forma cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$, donde A es una matriz en $\mathbb{R}^{n \times n}$, x y b son vectores en \mathbb{R}^n y c es un escalar constante. Calcular $f'(x)$. Mostrar que si A es *spd*, $f(x)$ es minimizada por la solución de $Ax = b$.
2. Para el Método de Steepest Descent demostrar que si el error e_i en la iteración i es un autovalor de la matriz A cuyo autovalor es λ_e , se convergerá a la solución exacta en la próxima iteración, i.e., $i + 1$.
3. Dar una interpretación geométrica del ejercicio anterior y decir cuanto tiene que valer α (la long del paso en la dirección de búsqueda) para obtener convergencia inmediata.
4. **GC como método directo.**

Resolver la ecuación de Poisson

$$\Delta\phi = -f, \text{ en } \Omega = \{x, y / 0 \leq x, y \leq 1\} \quad (1)$$

$$\phi = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (2)$$

con una grilla de diferencias finitas de $(N + 1) \times (N + 1)$ puntos. Usar $N = 4, 6, 8$ y 10 y ver en cuantas iteraciones converge a precisión de máquina. Calcular los autovalores de A y ver cuantos distintos hay. Inicializar con `x0=rand(n,1)` y ver en cuantas iteraciones converge. Porqué?. Puede usar las rutinas de Octave provistas por la cátedra.

5. **GC como método iterativo.**

Idem que el ej. anterior pero ahora para $N = 100$. (No tratar de construir la matriz!! La matriz llena ocupa 800Mbytes y la banda 8Mbytes). Graficar la curva de convergencia y comparar el n experimental con el teórico (basado en una estimación del número de condición de la matriz). Comparar la convergencia con el método de Richardson (con $\omega = \omega_{\text{opt}}$), en números de iteraciones y en tiempo de CPU. Puede usar las rutinas de Octave provistas por la cátedra.

6. Resolver el punto anterior en el cluster en forma secuencial usando las rutinas de PETSc provistas (con y sin preconditionamiento de Jacobi *Point Jacobi*). Sacar conclusiones acerca de los resultados obtenidos en relación a resultados de los puntos anteriores.
7. Resolver los puntos anteriores en el cluster usando 4 procesadores (con y sin preconditionamiento de Jacobi *Point Jacobi*). Sacar conclusiones acerca de los resultados obtenidos en relación a resultados de los puntos anteriores.
8. Verificar la escalabilidad del Método CG (con prec. point Jacobi) para el problema de Poisson usando una grilla de 1000×1000 . Es decir el comportamiento de la cantidad de iteraciones de CG para bajar el residuo un cierto orden de magnitud (por ejemplo 5 órdenes) en función de la cantidad de procesadores. Sacar conclusiones acerca de la escalabilidad del algoritmo.