Guia Trabajos Practicos 1

Norberto Marcelo Nigro [a,1] Gerardo Franck [a,2] Pablo Kler [a,3]

[a] *Facultad de Ingenieria y Ciencias Hidricas de la Universidad Nacional del Litoral (FICH-UNL), Ciudad Universitaria, 3000 Santa Fe, ARGENTINA*

EJERCICIO 1

Considere el problema de conducción del calor 1D:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k\Delta T + Q - c(T - T_{\mathrm{amb}}) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L \tag{1}$$

donde k es la conductividad del medio, T la temperatura, Q una fuente de calor interna, c una constante de pérdida de calor al medio ambiente y T_{amb} la temperatura del medio ambiente. Las condiciones de contorno en los extremos pueden ser

$$\begin{aligned} T = \bar{T}, &\quad \text{Dirichlet} \\ \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} = -k\frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q}, &\quad \text{Neumann - flujo impuesto} \\ \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} = -k\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T\infty), &\quad \text{Robin - convección} \end{aligned} \tag{2}$$

Considerar el caso estacionario, con $c = 0$, $k = 1$, $Q = 1$ para $x \leq \frac{1}{2}$, $Q = 0$ si $x > \frac{1}{2}$, condición Dirichlet $\bar{T} = 1$, en $x = 0$ y $\bar{T} = 0$, en $x = L$. Escribir un programa para resolver el problema anterior por el método de diferencias finitas usando una malla uniforme de paso $h = 1/N$, donde N es el número de segmentos. Mostrar como el error con respecto a la solución analítica se reduce al aumentar el número de intervalos N.

---

[1] e-mail nnigro@intec.unl.edu.ar
[2] e-mail gerardofranck@yahoo.com.ar
[3] e-mail pabloakler@gmail.com

6 de septiembre de 2010

EJERCICIO 2

Resolver ahora el problema del Ejercicio 1, incluyendo el término temporal, con $c = 1$, $T_{\mathrm{amb}} = 0$, con condición de contorno Neumann homogénea ($\bar{q} = 0$) en $x = L$, utilizando un esquema de integración temporal explcito. Justifique la elección del paso de tiempo máximo (Δt). Luego muestre como evoluciona el error respecto de la solución analítica al disminuír Δt para dos instantes de tiempo diferentes..

EJERCICIO 3

Repetir el ejercicio anterior con un esquema de integración temporal de Crank Nicholson.

EJERCICIO 4

Suponga la ecuación de difusión-migración para una especie ϕ cargada eléctricamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Omega \mathbf{E} \phi) = \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{3}$$

Donde Ω es la movilidad de la especie, que relaciona la velocidad de migración con la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}$, y ν es la difusividad de la especie. Encuentre, mediante el método de diferencias finitas, una solución al campo de concentraciones $\phi(\mathbf{x}, t)$ en un dominio rectangular de $10 \times 1\ cm^2$ para las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, 0) = e^{-((x-0{,}5)/0{,}05)^2} e^{-((y-0{,}5)/0{,}05)^2} \\ \Phi(0, 0, t) = 0\ V \\ \Phi(10, 1, t) = 10\ V \end{aligned} \tag{4}$$

Donde Φ es el potencial eléctrico aplicado. Para las fronteras que no se mencionan, las condiciones de borde correspondientes son del tipo natural. Suponga $\Omega = 5.\ 10^{-7}\ \frac{m^2}{Vs}$, $\nu = 10^{-8}\ \frac{m^2}{s}$, y la conductividad y la permitividad eléctrica del medio constante. Justifique la elección de los parámetros de discretización temporal y espacial. Grafique la solución para tres instantes de tiempos diferentes.