Ejercicios Guia Trabajos Practicos 0

Norberto Marcelo Nigro [a,1] Gerardo Franck [a,2] Pablo Kler [a,3]

[a] *Facultad de Ingenieria y Ciencias Hidricas de la Universidad Nacional del Litoral (FICH-UNL), Ciudad Universitaria, 3000 Santa Fe, ARGENTINA*

EJERCICIO 1

Los problemas de transferencia de calor expresan la satifaccion de la conservacion de la energia en el campo de la fisica. Una representacion simple de los mismos viene dada por el siguiente problema matematico:

Hallar el campo de temperaturas $T(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}T) + cT = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \mathcal{G} \qquad & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\
T = \overline{T} \qquad & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_T \\
\mathbf{q} = -\kappa \nabla T = \overline{q} \qquad & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q \\
\mathbf{q} = -\kappa \nabla T + h(T - T_{ref}) = 0 \qquad & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h \\
T = T^0 \qquad & \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{at } t = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Supongamos que para comenzar con algo simple despreciamos la conveccion, planteamos la solucion estacionaria y pensamos que existe una simetria del problema tal que puede ser resuelto en 1D. Entonces el problema queda planteado como

Hallar el campo de temperaturas $T(x)$ tal que

[1] e-mail nnigro@intec.unl.edu.ar
[2] e-mail gerardofranck@yahoo.com.ar
[3] e-mail pabloakler@gmail.com

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \mathcal{G} - cT = 0 \qquad & \forall x \in [0, L] \\
T(x = 0) = T_0 \qquad & \\
T(x = L) = T_L \qquad &
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Se sabe que la solucion analitica de este problema se puede escribir como

$$
T = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \tag{3}
$$

- Reemplace la solucion analitica 3 en la ecuacion diferencial 2 y aplique las condiciones de contorno usando $T_0 = 0$ y $T_L = 1$, $\kappa = 1$, $c = 1$ y $\mathcal{G} = 1$
- Grafique la solucion analitica con Octave
- Calcule el flujo de calor en funcion de la posicion
- Grafiquelo usando Octave.

Comentarios:: Los graficos deben contener los ejes con sus nombres y el titulo en la cabecera del grafico.

EJERCICIO 2

Repita el problema anterior pero ahora reemplace la condicion de contorno del extremo derecho para $x = L$ por una condicion del tipo $\mathbf{q}(x = L) = 1$.

EJERCICIO 3

Los problemas de elasticidad lineal vienen gobernados por la ecuacion de equilibrio

$$
\nabla \cdot \sigma + \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{4}
$$

donde $\sigma = \mathbf{D}\epsilon$, ϵ el tensor de deformacion, σ el tensor de tensiones, $\mathbf{D}$ la matriz que relaciona tensiones con deformaciones y $\mathbf{X}$ es la fuerza externa. Se sabe que existe una relacion entre deformaciones y desplazamientos $\epsilon = \mathbf{Lu}$ donde $\mathbf{L}$ es un operador diferencial que las relaciona.

Para mas detalles tomar las expresiones de las mismas de la literatura.

Suponiendo que el campo de desplazamientos obtenidos para un problema en 2D ajusta bien la funcion analitica

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
u(x,y) &= -0.1\, sin(\frac{\pi x}{L_x})\, cos(\frac{\pi y}{2L_y}) \\
v(x,y) &= -0.1\, sin(\frac{\pi x}{2L_x})\, cos(\frac{\pi y}{L_y})
\end{aligned} \tag{5}
$$

Calcular

- El tensor deformacion $\epsilon(x,y)$ y graficarlo
- El tensor de tensiones $\sigma(x,y)$ y graficarlo
- La fuerza externa que es capaz de producir tal solucion en desplazamientos y graficarla

EJERCICIO 4

Escribir una funcion A = *area(x,grid)* que calcula el area total de una malla de superficie en 3D, donde *x(np,3)* son las coordenadas de los nodos en el espacio y *grid(ntri,3)* define la grilla de triangulos de la superficie, es decir que *grid(k,:)* son los 3 nodos vértices del k-ésimo triángulo de la superficie. Se provee un script testarea.m que genera una grilla de triangulos en el espacio, primero para un cuadrado plano de lado 1, y después para un sector de 1/24 de esfera. Verificar que en ambos casos el resultado es el correcto. (1 y $\pi/6$ respectivamente).

EJERCICIO 5

Escribir una función *[s,v] = tetra(x)* que calcule las áreas s (con su respectivas normales) y el volumen v del tetraedro tal que las coordenadas de sus vértices son las respectivas filas de la matriz x. Es decir, x es una matriz de 4×3 y *x(k,:)* para *k=1,...,4* son las coordenadas del vértice k del tetrahedro. *s(k,:)* debe contener entonces un vector paralelo a la normal a la cara opuesta al vértice k y su longitud debe ser igual al área de dicha cara.