X DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE CAMPO

En capítulos anteriores hemos analizado

deformación } y su relación y tensiones (interacción entre partes del sistema).
flujo }

Usaremos la información vista p/desarrollar las ecs diferenciales que describen el movimiento del continuo bajo condiciones de borde específicas.

La formulación deriva de:

- ley de Newton del movimiento
- principio de conservación de masa
- leyes de termodinámica.

Veremos cómo expresar estas leyes de manera adecuada p/un continuo.

Notas: Sistema 1 partícula | Sistema de ∞ part.

• m

N

Conservación de masa $\Rightarrow m = cte$ | ¿Cómo expresar conserv de masa?

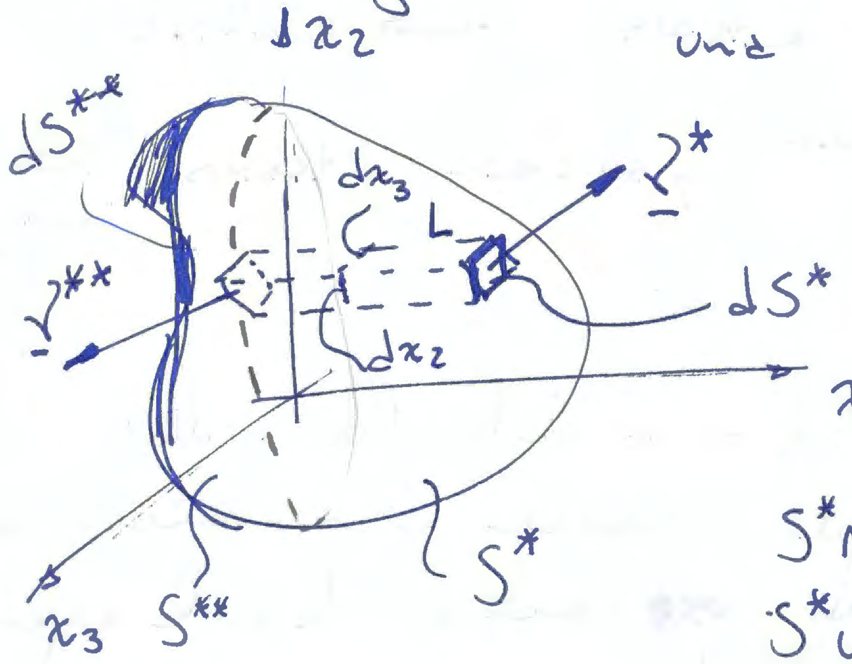
Necesitamos trabajar mediante integrales sobre ~~superficies~~ volúmenes encerrados por superficies arbitrarias.

Requerimos transformar $int_V \rightarrow int_S$

lo hacemos usando teorema de Gauss.

10.1| Teorema de Gauss

Sea una región V convexa encerrada por una superficie S.



$S^* \cap S^{**} = \{\emptyset\}$

$S^* \cup S^{**} = S$

La superficie S consiste de un número finito de partes con normales externas y forma un campo continuo. (V región regular).

Sea la función

$$A(x_1, x_2, x_3) : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

A es ~~...~~ diferenciable y continuidad en V.

Consideramos:

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

Integrando a lo largo del segmento L y respecto a x_1:

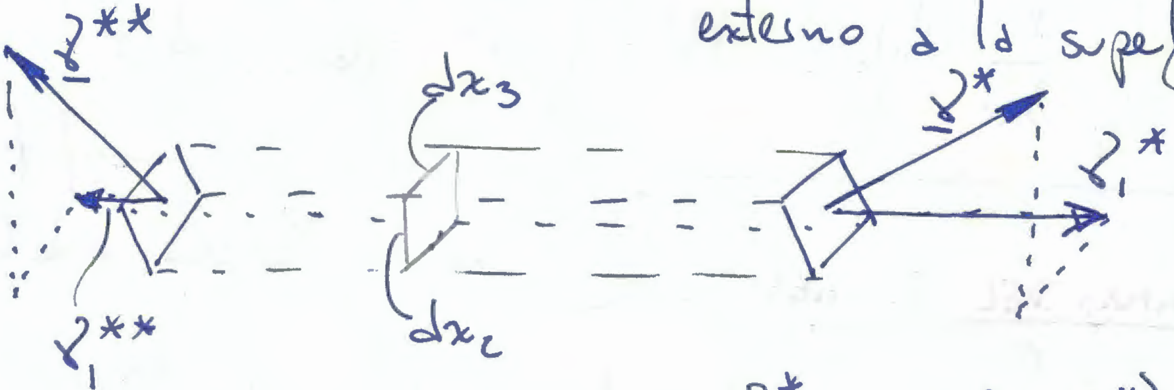
$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S (A^* - A^{**}) dx_2 dx_3 =$$

$$\iint_{S^*} A^* dx_2 dx_3 - \int_{S^{**}} A^{**} dx_2 dx_3 = (1)$$

Notemos que

$$\left.\begin{array}{l} +dx_2dx_3 \\ -dx_2dx_3 \end{array}\right]$$ proyecciones sobre el plano x_2x_3 de las áreas dS^* y dS^{**} e los extremos del segmento L.

Sea $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ vector unitario normal externo a la superficie S.



$\gamma_1^* = \cos(x_1, \underline{\gamma}^*)$ (posit)

$$\gamma_1^{**} = \cos(x_1, \underline{\gamma}^{**}) =$$
$$= -\cos(-x_1, \underline{\gamma}^{**}) \quad \text{(negat)}$$

$$+dx_2dx_3 = \gamma_1^* dS^*$$
$$-dx_2dx_3 = \gamma_1^{**} dS^{**}$$

$$(1) = \iint_{S^*} A^* \gamma_1^* dS^* + \iint_{S^{**}} A^{**} \gamma_1^{**} dS^{**}$$

$\therefore$

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dV = \iint_S A \gamma_1 dS$$

De manera similar, p/ los otros direcciones:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i}\, dV = \int_S A \nu_i \, dS \qquad i = 1,2,3$$

Si consideramos ahora un campo tensorial $A_{jkl,\dots}$ tenemos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\dots}\, dV = \int_S \nu_i A_{jkl\dots}\, dS$$

(teorema de Green o de Gauss)

FORMAS DEL T. GREEN:

Ej 1 Sea v_i un vector. Luego, haciendo $A_i = v_i \Rightarrow$

$$\int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dV = \int_S v_i \nu_i \, dS$$

o:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{v}\, dV = \int_S \underline{v} \cdot \underline{\nu}\, dS$$

Ej 2 Escribiendo $A \equiv \phi$ (función potencial), podemos escribir

$$\int_V \underline{\nabla} \phi\, dV = \int_V \operatorname{grad} \phi\, dV = \int_S \underline{\nu}\, \phi\, dS$$

Ej 3

Sea $e_{ijk}\, u_{k,j} = (\text{rot}\ \underline{u})_i$

Luego

$$\int_V e_{ijk}\, u_{k,j}\, dV = e_{ijk}\int u_{k,j}\, dV =$$

$$= e_{ijk}\int_S u_k\, \nu_j\, dS =$$

$$= \int_S e_{ijk}\, u_k\, \nu_j\, dS$$

$$\therefore \int \text{rot}\ \underline{u}\ dV = \int_S \underline{\nu} \times \underline{u}\ dS$$

10.2) Descripción material del movimiento de un continuo

Sea un marco de referencia fijo $\{O x_1 x_2 x_3\}$.
Sea una partícula material ubicada en

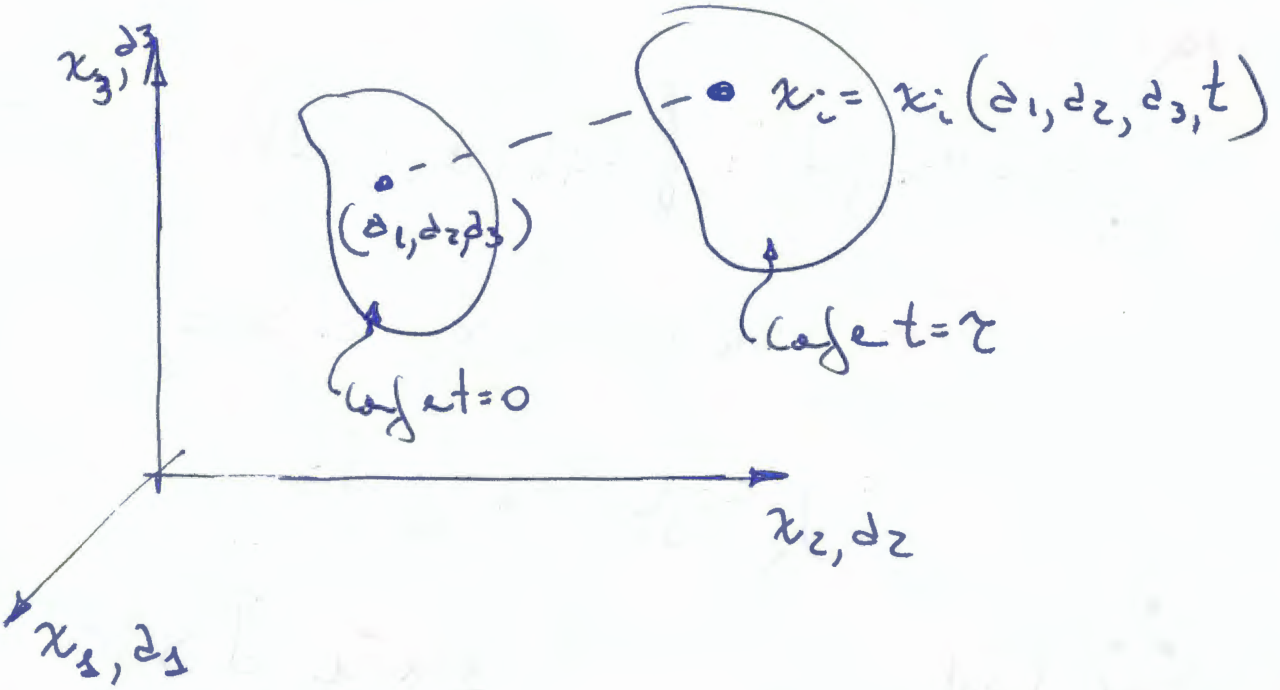
$$x_1 = a_1 \qquad x_2 = a_2 \qquad x_3 = a_3 \qquad \text{cuando } t = t_0.$$

Rotulamos esta partícula como (a_1, a_2, a_3).
A medida que avanza el tiempo su ubicación cambia:

$$x_1 = x_1(a_1, a_2, a_3, t)$$
$$x_2 = x_2(a_1, a_2, a_3, t)$$
$$x_3 = x_3(a_1, a_2, a_3, t)$$

o, lo que es lo mismo:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (*)$$



Conociendo esta ecuación p/c/ partícula del cuerpo, luego conocemos la historia de movimiento del cuerpo.

Matemáticamente, conocemos la "transformación o mapeo" paramétrico (para t) de

$$\mathcal{X} : D(a_1, a_2, a_3) \longrightarrow D'(x_1, x_2, x_3)$$

Si este mapeo 1) es continuo y 1 a 1 (o sea p/c/ punto (a_1, a_2, a_3) existe 1 y sólo 1 punto (x_1, x_2, x_3) y viceversa);

2) puntos vecinos en D son mapeados en puntos vecinos en D';

luego las funciones $x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ son

- toman valor único
- continuas
- diferenciables c/continuidad

y además el Jacobiano no se debe anular en D :

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right| = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial a_1 & \partial x_1/\partial a_2 & \partial x_1/\partial a_3 \\ \partial x_2/\partial a_1 & \partial x_2/\partial a_2 & \partial x_2/\partial a_3 \\ \partial x_3/\partial a_1 & \partial x_3/\partial a_2 & \partial x_3/\partial a_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

El mapeo (*) se dice "descripción material del movimiento del cuerpo".

En una descripción material, las velocidades y aceleraciones resultan:

$$v_i(a_1, a_2, a_3) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{(a_1, a_2, a_3)}$$

$$\alpha_i(a_1, a_2, a_3) = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{(a_1, a_2, a_3)} = \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right|_{(a_1, a_2, a_3)}$$

~~La~~ Conservación de masa:

Sea $\rho(\underline{x})$ la densidad del material en $\underline{x}$. $(t=\tau)$

$\rho_0(\underline{a})$ " " " " " $\underline{a}$ $(t=0)$

En el instante inicial $(t=0)$

$$\int_D \rho_0(\underline{a})\, da_1\, da_2\, da_3 \Rightarrow \text{masa del material en } V_0\ (t=0)$$

y: $$\int_{D'} \rho(\underline{x})\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \Rightarrow \text{" en } V\ (t=\tau)$$

Luego, la conservación de masa se expresa:

$$\int_{D'} \rho(\underline{x})\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_{D} \rho_0(\underline{a})\, da_1\, da_2\, da_3$$

Pero:

$$\int_{D'} \rho(\underline{x})\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_{D} \rho(\underline{x}) \overset{J}{\cancel{\left|\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right|}}\, da_1\, da_2\, da_3$$

con $J = \left|\dfrac{\partial x_i}{\partial a_j}\right|$

En consecuencia, los integrandos deben ser iguales:

$$\rho_0(\underline{a}) = \rho(\underline{x}) \left|\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right|$$

y similarmente

$$\rho(\underline{x}) = \rho_0(\underline{a}) \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|$$

Estas ecuaciones relacionan la densidad en distintas configuraciones del cuerpo y la transformación que lleva de una a la otra.

10.3) Descripción espacial del movimiento de un continuo

En la descripción material, cada partícula está identificada por sus coordenadas en un instante dado t_0. Esto no es siempre conveniente.

Cuando describimos el flujo de agua en un río, no queremos identificar la ubicación de donde viene cada partícula de agua. En cambio, nos interesa el campo de velocidad instantáneo y su evolución en el tiempo.

Esto nos lleva a la descripción espacial usada en hidrodinámica.

Variables independientes: x_1, x_2, x_3, t

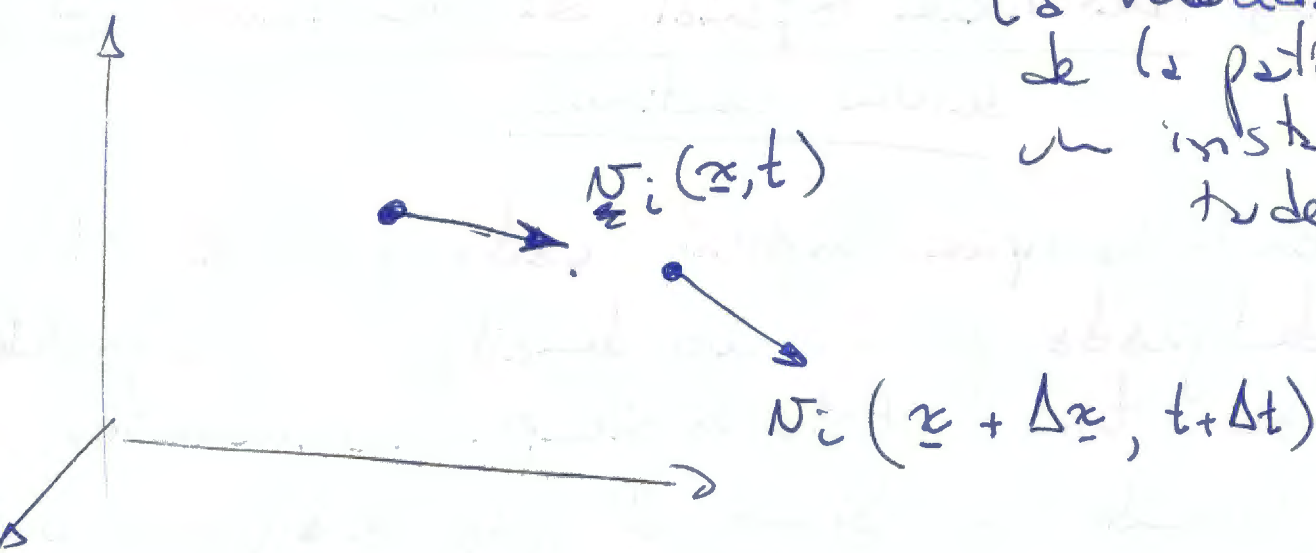
El movimiento instantáneo del continuo lo describimos por el campo de velocidad

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

(velocidad p/el instante t en el punto x_1, x_2, x_3)

Esa es la velocidad que lleva una partícula q/pasa por el punto (x_1, x_2, x_3) al instante t. Cuál será su aceleración?

La velocidad de la partícula, un instante + tarde:



$$v_i(\underline{x}+\Delta\underline{x}, t+\Delta t) = v_i(\underline{x}+\underline{v}\,\Delta t,\ t+\Delta t)$$

Luego, la aceleración:

$$\dot{v}_i(\underline{x},t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v_i(\underline{x}+\underline{v}\,\Delta t,\ t+\Delta t) - v_i(\underline{x},t)}{\Delta t} =$$

Desarrollando el 1er término por Taylor:

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\cancel{v_i(\underline{x},t)} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\underline{x},t)\, v_j \Delta t + \frac{\partial v_i}{\partial t}(x,t)\,\Delta t - \cancel{v_i(x,t)}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\boxed{\dot{v}_i(\underline{x},t) = \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\underline{x},t)}$$

El primer término aparece por la dependencia ~~t~~ temporal del campo de velocidad. El segundo es contribución del movimiento de la partícula en el campo de velocidad no homogéneo.

El razonamiento anterior puede aplicarse a toda función $F(x_1, x_2, x_3, t)$ que es atribuible a las partículas en movimiento (ej. la temperatura) ⑥

$\Rightarrow$ DERIVADA MATERIAL

$$\dot{F} = \frac{DF}{Dt} \equiv \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{\underline{x}=\text{cte}} + \underline{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}$$

La derivada material $\dot{F}$ significa la tasa de cambio de la propiedad F para la partícula (a_1, a_2, a_3):

$$\dot{F} = \left.\frac{\partial F(a_1, a_2, a_3, t)}{\partial t}\right|_{\underline{a}=\text{cte}}$$

Viendo $F(x_1, x_2, x_3, t)$ como función implícita de a_1, a_2, a_3, t tenemos:

$$\dot{F} = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{\underline{x}} + \left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_t \left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\underline{a}} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}$$

10.1) Derivada material de un volumen integral:

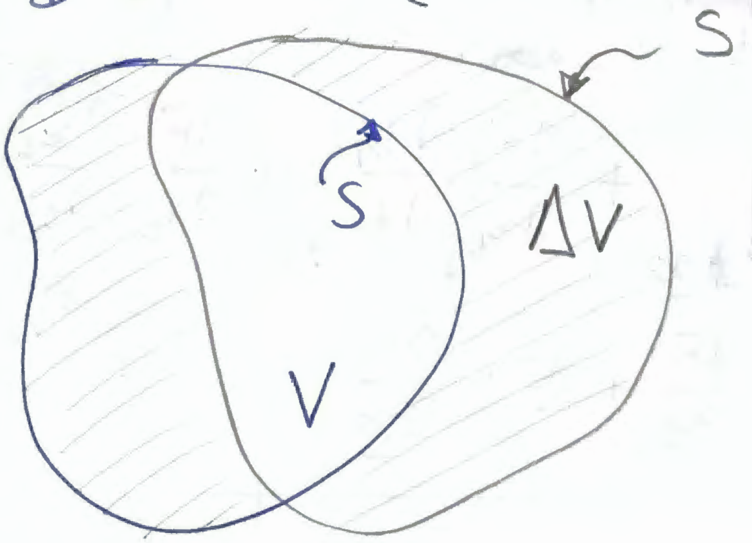
Sea $I(t)$ un volumen integral de una función diferenciable y continuidad $A(\underline{x},t)$ definida sobre un dominio espacial $V(x_1,x_2,x_3,t)$ ocupado por un conjunto de partículas:

$$I(t) = \int_V A(\underline{x},t)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

I es función del tiempo porque tanto A como V dependen del parámetro t.

Pregunta: cuál es la tasa de cambio de I con respecto a t (a conjunto de partículas fijo)?

$\dfrac{DI}{Dt}$? (derivada material de I)



La frontera de la región cambia al movernos de t a $t+\Delta t$.

V c/frontera $S \longrightarrow V'$ c/frontera S'

La derivada material resulta:

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V'} A(\underline{x}, t+\Delta t)\, dV - \int_{V} A(\underline{x}, t)\, dV \right]$$

Sea ΔV el dominio $V' - V$.

Note que ΔV es barrido por S en el intervalo Δt.

Como $V' = V + \Delta V$, podemos escribir:

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V} A(\underline{x}, t+\Delta t)\, dV + \int_{\Delta V} A(\underline{x}, t+\Delta t)\, dV - \int_{V} A(\underline{x}, t)\, dV \right) \right\} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{V} \left[A(\underline{x}, t+\Delta t) - A(\underline{x}, t) \right] dV \right\}}_{\int_V \frac{\partial A}{\partial t}\, dV} + \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} A(\underline{x}, t+\Delta t)\, dV \right\}$$

El segundo término puede como el producto de $A(\underline{x}, t)$ por el volumen ΔV, que en el límite $\Delta t \to 0$ resulta:

$$\Delta V \simeq S\, \gamma_i\, v_i\, \Delta t$$

Luego:

$$\frac{DI}{Dt} = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}\, dV + \int_S A(\underline{x},t)\, \underline{v} \cdot \underline{\gamma}\, dS$$

Usando el teor. de Gauss (Ej 1):

$$= \int_V \frac{\partial A}{\partial t}\, dV + \int_V \mathrm{div}(A\underline{v})\, d\cancel{S}V$$

Finalmente:

$$\left[\frac{D}{Dt} \int_V A\, dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}\, dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i}(A v_i)\, dV = \right.$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_i} v_i + A \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV =$$

$$\left. = \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV \right]$$

Nota que la derivada material <u>no conmuta</u> en general con la integración espacial.

10.5) Ecuación de continuidad

La masa contenida en un dominio V en un instante t:

$$m = \int_V \rho \, dV$$

$\rho(\underline{x},t)$ densidad del continuo en $\underline{x}$ al inst. t.

La conservación de masa requiere

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

Usando los resultados del punto anterior:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \, dV = 0$$

(1) $$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_S \rho v_i \nu_i \, dS = 0$$

(útil cuando la diferenciabilidad de ρv_j no puede asegurarse)

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \right) dV = 0$$

(2) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$$

(3) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

(Distintas formas de la ecuación de continuidad)

10.6) Ecuaciones del movimiento

Ecs de Newton dice que en un marco inercial, la tasa material de cambio de la Cantidad de ~~momento~~ lineal del cuerpo es igual a la resultante de cargas aplicadas.

~~Momento~~ Cantidad de movimiento lineal de las partículas en V

$$P_i = \int_V \rho v_i \, dV$$

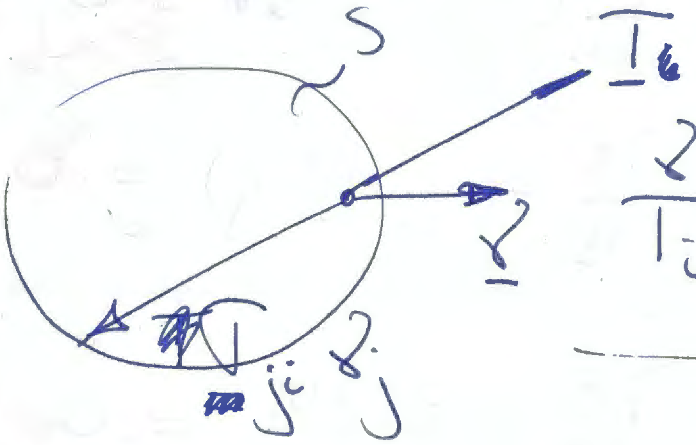
Acciones externas sobre el cuerpo

$$F_i = \int_S \overset{\nu}{T}_i \, dS + \int_V X_i \, dV$$

fzs superficie

fzs de volumen

Usando la fórmula de Cauchy, la tracción de superficie $\overset{\nu}{T}_i$ puede expresarse en términos de la tensión:



$$\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ji}\nu_j$$

Sustituyendo:

$$\int_S \overset{\nu}{T}_i \, dS = \int_S \sigma_{ji} \nu_j \, dS \overset{\text{Gauss}}{=} \int_V \sigma_{ji,j} \, dV$$

$$\mathcal{F}_i = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \qquad (*)$$

La ley de Newton se expresa:

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{P}_i = \mathcal{F}_i$$

Usando derivada material de un vol integral:

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{P}_i = \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i \, dV =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \right) dV \qquad (**)$$

Igualando (*) y (**) y continuidad vale p/ Volumen arbit

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

$$v_i \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \right]}_{=0 \ (\text{Continuidad})} + \rho \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)}_{\frac{D v_i}{Dt}}$$

Llegamos así a la ecuación Euleriana del movimiento de un continuo:

$$\rho \frac{D v_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

Si las velocidades se anulan:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

(eq estático)

Ecuaciones de Navier Stokes

Derivamos las ecs que gobiernan el flujo en un fluido viscoso Newtoniano.

Sean p: presión

λ: de Lamé (módulo volumétrico)

σ_{ij}: comp de tensión

μ: coeficiente de viscosidad.

Luego, la relación tensión tasa de deformación:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda V_{kk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} =$$

$$= -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Sustituyendo en la ec de movimiento:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \qquad (*)$$

X_i : f_i por unidad de masa.

Las compontes de velocidad debe verificar además la ecuación de continuidad (conserv de masa):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0$$

Si el fluido es <u>incompresible</u>, luego

$$\rho = cte$$

Si además es homogéneo, entonces la ec de continuidad resulta:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad ó : \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Además, la ec de conserv de cant de mov resulta:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

(usar $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ en (*))

Definiendo el operador ∇^2 (Laplaciano)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

podemos escribir

$$\frac{Du_i}{Dt} = X_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i$$

donde $\nu = \mu / \rho \Rightarrow$ viscosidad cinemática

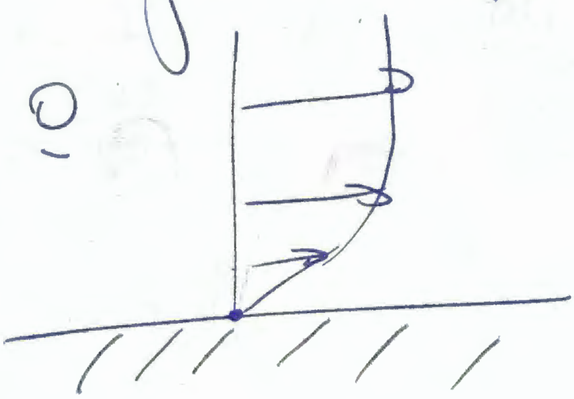
$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

$\rightarrow$ sist de 4 ecs dif en las incógnitas v_i, p para flujo incompresible viscoso.

Estas ecs son no lineales, y en gral difíciles de resolver. Deben completarse con condiciones de borde apropiadas.

Nos, además, en una frontera sólida:

$\underline{v} = \underline{0}$



Ecuaciones de elasticidad

Sea un sólido que satisface la ley de Hooke.

Sea $u_i(\underline{x},t)$ el desplazamiento de una partícula ubicada en $\underline{x}$ al instante t.

El tensor de deformación de Almansi:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right]$$

La velocidad de la partícula está dada por la derivada material del desplazamiento:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

La aceleración resulta de la derivada material de la velocidad

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Conservación de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

Conservación de cantidad de movimiento:

$$\rho \alpha_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

Ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2 G e_{ij}$$

λ, G: ctes de Lamé

Comparando c/ las ecs de un fluido vemos que la estructura es similar, excepto que tenemos relaciones no lineales deformación - desplazamiento.

~~La teoría~~ El problema no lineal elástico es complicado de resolver. Su formulación se hace generalmente en un marco material.

De todas formas, es usual simplificar linealizando el problema, a partir de la hipótesis que los desplazamientos y velocidades son pequeños. Luego:

$$e_{ij} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$v_i \simeq \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

$$\alpha_i \simeq \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Sustituyendo, obtenemos las ecs de Navier:

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x_i} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

donde

$$e = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3}$$ (operador laplaciano)

Esta ecuación se resuelve c/cond borde apropiadas

(1) Desplaz impuestos Componentes de u_i especificadas en parte de la frontera

(2) Tracciones de sup impuestas Componentes $\overset{\nu}{T_i}$ asignadas en el resto de la frontera.