PRINCIPIOS VARIACIONALES: APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DEL CALOR

Víctor Fachinotti

Cátedra de Mecánica del Continuo, Carrera de Ingeniería Informática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral (UNL), vfachino@intec.unl.edu.ar, http://www.cimec.org.ar/mc

1. FORMA VARIACIONAL DE LA ECUACIÓN DEL CALOR

En régimen estacionario, la distribución de temperaturas T sobre un cuerpo $\mathcal{B}$ está gobernada por la ecuación del calor

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (k\boldsymbol{\nabla}T) + f = 0 \qquad \text{sobre } \mathcal{B} \tag{1}$$

donde k es la conductividad térmica del material y f es una fuente interna de calor distribuida en $\mathcal{B}$.

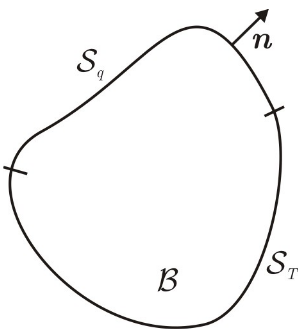

Figura 1: Dominio del análisis térmico

Como se observa en la figura 1, $\mathcal{B}$ tiene su frontera $\mathcal{S}$ dividida en dos porciones: $\mathcal{S}_T$, donde se impone la temperatura $\bar{T}$, y $\mathcal{S}_q$, donde se impone el flujo de calor $\bar{q}$. La ecuación del calor (1) está entonces sujeta a las condiciones de borde

$$T = \bar{T} \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_T \text{ (Condición de borde tipo Dirichlet)} \tag{2}$$

$$-k\boldsymbol{\nabla}T \cdot \boldsymbol{n} = \bar{q} \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_q \text{ (Condición de borde tipo Neumann)} \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector unitario saliente normal a la frontera $\mathcal{S}$.

La solución T debe pertenecer al conjunto $\mathcal{V}$ de funciones suficientemente suaves (esto es, continuas y de derivadas parciales continuas hasta un orden suficientemente grande) que satisfacen la condición de borde en la porción $\mathcal{S}_T$ de la frontera:

$$\mathcal{V} = \{u \text{ suficientemente suave tal que } u = \bar{T} \text{ sobre } \mathcal{S}_T\} \tag{4}$$

Dada un función arbitraria $\tilde{T} \in \mathcal{V}$, definimos la **variación** de $T \in \mathcal{V}$ como

$$\delta T = \tilde{T} - T \tag{5}$$

Luego, δT pertenece al espacio de variaciones admisibles

$$\mathcal{W} = \{u \text{ suficientemente suave tal que } u = 0 \text{ sobre } \mathcal{S}_T\} \tag{6}$$

Multipliquemos la equación de calor (1) por δT y luego integremos sobre $\mathcal{B}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T) \delta T \, \mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{B}} f \delta T \, \mathrm{d}V \tag{7}$$

Nótese que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T \delta T) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T) \delta T + k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta T \tag{8}$$

donde el primer término del lado derecho es el integrando del lado izquierdo de la ecuación (7). Luego, el lado izquierdo de la ecuación (7) se puede descomponer como:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T) \delta T \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T \delta T) \, \mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}} k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta T \, \mathrm{d}V \tag{9}$$

Apliquemos el **teorema de Gauss** al primer término del lado derecho:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T \delta T) \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}} (k \boldsymbol{\nabla} T \delta T) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{n} \delta T \, \mathrm{d}S \tag{10}$$

Como $\delta T = 0$ sobre $\mathcal{S}_T$:

$$\int_{\mathcal{S}} k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{n} \delta T \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_q} k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{n} \delta T \, \mathrm{d}S \tag{11}$$

Sobre $\mathcal{S}_q$, tenemos la condición de borde $-k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{n} = \bar{q}$, así que el primer término del lado derecho de la ecuación (9) resulta finalmente

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T \delta T) \, \mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{S}_q} \bar{q} \delta T \, \mathrm{d}S \tag{12}$$

Introduciendo ésta en la ecuación (9), tenemos

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T) \delta T \, \mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{S}_q} \bar{q} \delta T \, \mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}} k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta T \, \mathrm{d}V \tag{13}$$

Introduciendo esta ecuación en la ecuación (7), llegamos a la **forma variacional o débil de la ecuación del calor**: hallar $T \in \mathcal{V}$ tal que

$$\int_{\mathcal{B}} k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta T \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} f \delta T \, \mathrm{d}V - \int_{\mathcal{S}_q} \bar{q} \delta T \, \mathrm{d}S \tag{14}$$

para toda variación admisible $\delta T \in \mathcal{W}$.

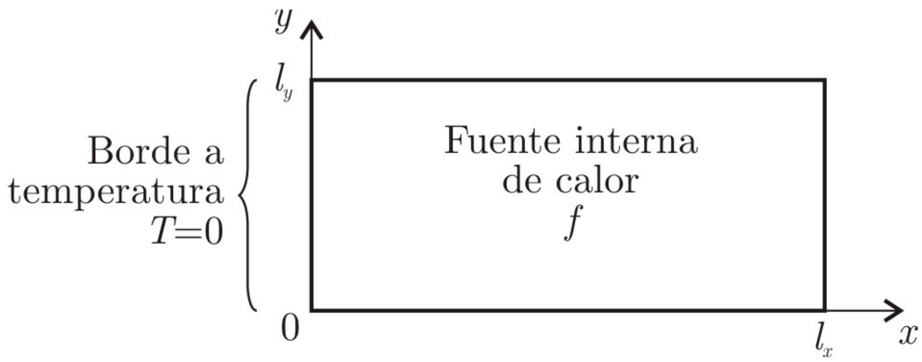

Figura 2: Conducción de calor en un dominio rectangular

2. CONDUCCIÓN DE CALOR EN UN DOMINIO RECTANGULAR

Sea un dominio rectangular $\mathcal{B} = [0, l_x] \times [0, l_y]$ como el de la Figura 2, donde la pared izquierda ($x = 0$) se mantiene a temperatura $T = 0$. En el dominio actúa una fuente interna de calor de magnitud f.

El problema de conducción de calor en este dominio, planteado en forma variacional por la ecuación (14) sin flujo de calor superficial ($\bar{q} = 0$), consiste en hallar la distribución de temperaturas $T = T(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}$ tal que

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta T \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \delta T \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{15}$$

para toda variación admisible δT de la temperatura.

2.1. Discretización del problema variacional

A continuación, describimos cómo discretizar el problema variacional (15), es decir, aproximarlo por un sistema de ecuaciones algebraicas con un número finito de incógnitas. Proponemos por ejemplo el siguiente espacio de soluciones

$$\mathcal{V} = \{u \text{ tal que } u = x P_n(x, y)\} \tag{16}$$

donde $P_n(x, y)$ es un polinomio completo de orden n. Nótese que las funciones $u \in \mathcal{V}$ tienen orden n en la variable y y orden $n + 1$ en la variable x, y pueden hacerse tan suaves como se quiera adoptando n suficientemente grande. **El problema se torna discreto al adoptar n finito**.

Además, al multiplicar P_n por x se garantiza que toda $u \in \mathcal{V}$ satisfaga automáticamente la condición de borde Dirichlet $u = 0$ en $x = 0$.

Recordemos que un polinomio P_n de orden n en dos variables x e y está dado por

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ji} x^j y^i \tag{17}$$

donde α_{ji} es un número real. Por ejemplo,

$$P_0(x,y) = \alpha_{00} = constante \tag{18}$$
$$P_1(x,y) = \alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y = P_0 + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y \tag{19}$$
$$P_2(x,y) = \alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{01}y + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 = P_1 + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 \tag{20}$$
$$\vdots$$

Gráficamente, los monomios del polinomio $P_n(x,y)$ quedan definidos por el triángulo de Pascal (Figura 3).

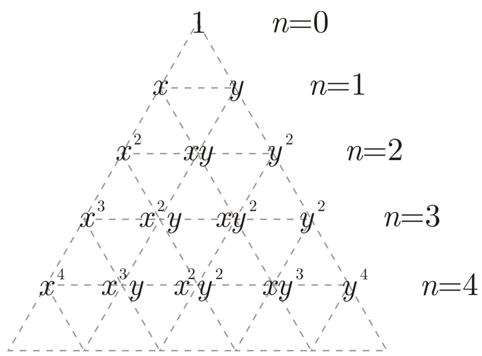

Figura 3: Triángulo de Pascal

Así, explícitamente, la solución $T \in \mathcal{V}$ resulta

$$T(x,y) = a_{00}x + a_{10}x^2 + a_{01}xy + a_{20}x^3 + a_{11}x^2y + a_{02}xy^2 + \ldots \tag{21}$$

con los coeficientes reales a_{ij} como incógnitas a determinar. La ecuación anterior puede escribirse en forma matricial como

$$T(x,y) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A} \tag{22}$$

con

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ xy \\ x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{23}$$

El gradiente de T resulta:

$$\boldsymbol{\nabla}T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} + 2xa_{10} + ya_{01} + 3x^2a_{20} + 2xya_{11} + y^2a_{02} + \ldots \\ 0 + 0 + xa_{01} + 0 + x^2a_{11} + 2xya_{02} + \ldots \end{bmatrix} = \boldsymbol{BA} \tag{24}$$

con

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y & 3x^2 & 2xy & y^2 & \ldots \\ 0 & 0 & x & 0 & x^2 & 2xy & \ldots \end{bmatrix} \tag{25}$$

Toda otra función $\tilde{T} \in \mathcal{V}$ puede expresarse como

$$\tilde{T}(x, y) = \tilde{\boldsymbol{A}}^T \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T \tilde{\boldsymbol{A}} \tag{26}$$

con

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{00} \\ \tilde{a}_{10} \\ \tilde{a}_{01} \\ \tilde{a}_{20} \\ \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{02} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{27}$$

siendo los coeficientes $\tilde{a}_{ij}$ números reales arbitrarios (y por ende, el vector $\tilde{\boldsymbol{A}}$ resulta arbitrario).

En forma matricial, la variación $\delta T \in \mathcal{W}$ puede escribirse como

$$\delta T = \tilde{T} - T = \delta \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T \delta \boldsymbol{A} \tag{28}$$

con $\delta \boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}$, arbitrario. El gradiente de δT resulta entonces

$$\boldsymbol{\nabla}(\delta T) = \boldsymbol{B} \delta \boldsymbol{A} \tag{29}$$

Ahora, remplazando las formas matriciales de T, δT y sus gradientes en la forma variacional de la ecuación del calor dada por la ecuación (15), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k(\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{A})^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \delta \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{X} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y && (30) \\
\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \delta \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \delta \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{X} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y && (31) \\
\delta \boldsymbol{A}^T \left(\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \boldsymbol{A} &= \delta \boldsymbol{A}^T \left(\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \boldsymbol{X} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) && (32) \\
& && (33)
\end{aligned}$$

Considerando que el vector $\delta \boldsymbol{A}$ es arbitrario, llegamos al siguiente sistema lineal de ecuaciones algebraicas con $\boldsymbol{A}$ como incógnita

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} \tag{34}$$

con

$$\boldsymbol{K} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} k \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{35}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} f \boldsymbol{X} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{36}$$

Nótese que la matriz $\boldsymbol{K}$ es simétrica, o sea, $\boldsymbol{K}^T = \boldsymbol{K}$.

2.2. Ejemplo 1: Conducción de calor en un dominio rectangular con fuente de calor uniforme

Aproximemos la solución T suponiendo $n = 1$, esto es, T es una función cuadrática de la variable x y lineal de la variable y. Con $n = 1$, la aproximación de T sólo contiene los términos con coeficientes a_{ij} donde $i + j \leq 1$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ xy \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y \\ 2x & 4x^2 & 2xy \\ y & 2xy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Asumiendo f y k constantes, tenemos

$$\boldsymbol{F} = f \int_0^{l_x} \int_0^{l_x} \boldsymbol{X} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = f \begin{bmatrix} l_x^2 l_y/2 \\ l_x^3 l_y/3 \\ l_x^2 l_y^2/4 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{K} = k \int_0^{l_x} \int_0^{l_x} \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = k \begin{bmatrix} l_x l_y & l_x^2 l_y & l_x l_y^2/2 \\ l_x^2 l_y & 4 l_x^3 l_y/3 & l_x^2 l_y^2/2 \\ l_x l_y^2/2 & l_x^2 l_y^2/2 & (l_x^3 l_y + l_x l_y^3)/3 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Para $l_x = 2\,\mathrm{m}$, $l_y = 1\,\mathrm{m}$, $f = 0{,}8\,\mathrm{W/m^2}$, $k = 10\,\mathrm{W/(mK)}$, resulta

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1{,}60 \\ 2{,}13 \\ 0{,}80 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 \\ 40 & 106{,}67 & 20 \\ 10 & 20 & 33{,}33 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0{,}1667 \\ -0{,}04 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Finalmente, la distribución de temperaturas en el dominio puede aproximarse como

$$T = 0{,}1667x - 0{,}04x^2 = T(x) \tag{41}$$

Esta solución es graficada en la Figura 4.

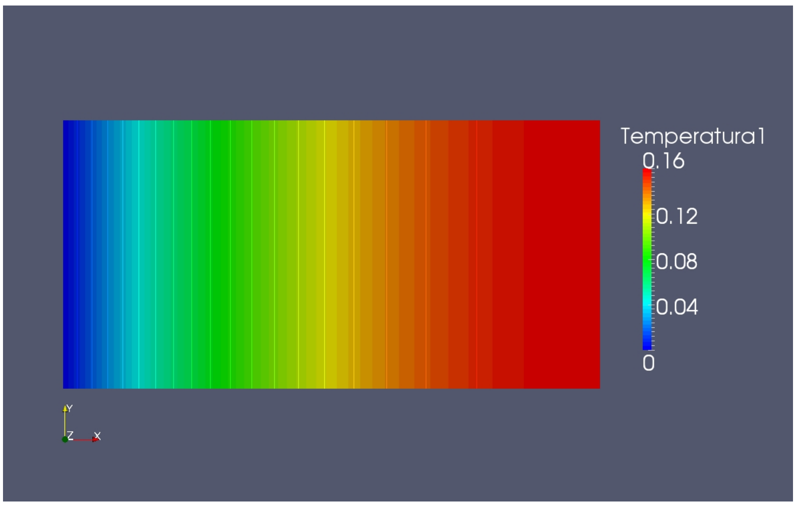

Figura 4: Ejemplo 1: Distribución de temperaturas

2.3. Ejemplo 2: Conducción de calor en un dominio rectangular con fuente de calor variable

Supongamos el mismo problema del ejemplo 1, a excepción de considerar que la fuente de calor varía a través del dominio según la expresión

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l_x}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{l_y} \tag{42}$$

Esta fuente de calor es ilustrada en la Figura 5.

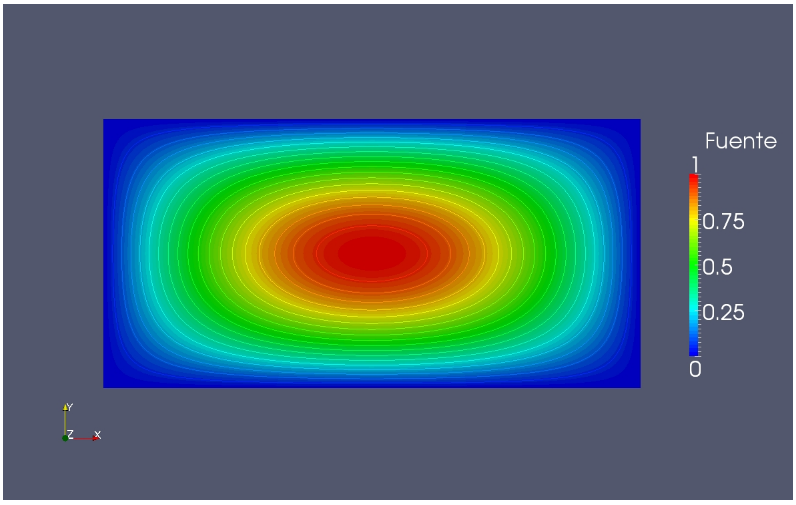

Figura 5: Ejemplo 2: Fuente variable $f = f(x, y)$

La matriz $\boldsymbol{K}$ es idéntica que en el ejemplo anterior

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 \\ 40 & 106{,}67 & 20 \\ 10 & 20 & 33{,}33 \end{bmatrix} \tag{43}$$

y sólo debemos recalcular

$$\boldsymbol{F} = \int_0^{l_x}\int_0^{l_x} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l_x}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{l_y}\boldsymbol{X}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} 2l_x^2 l_y/\pi^2 \\ 2(\pi^2-4)l_x^3 l_y/\pi^4 \\ l_x^2 l_y^2/\pi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8106 \\ 0{,}9641 \\ 0{,}4053 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Luego,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0{,}08901 \\ -0{,}02464 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Finalmente, la distribución de temperaturas en el dominio puede aproximarse como

$$T = 0{,}08901x - 0{,}02464x^2 = T(x) \tag{46}$$

Esta solución es graficada en la Figura 6.

Esta aproximación es pobre por cuanto no alcanza a captar la variación de T en la dirección y. Para mejorarla, debemos aumentar el número de términos en el polinomio aproximante.

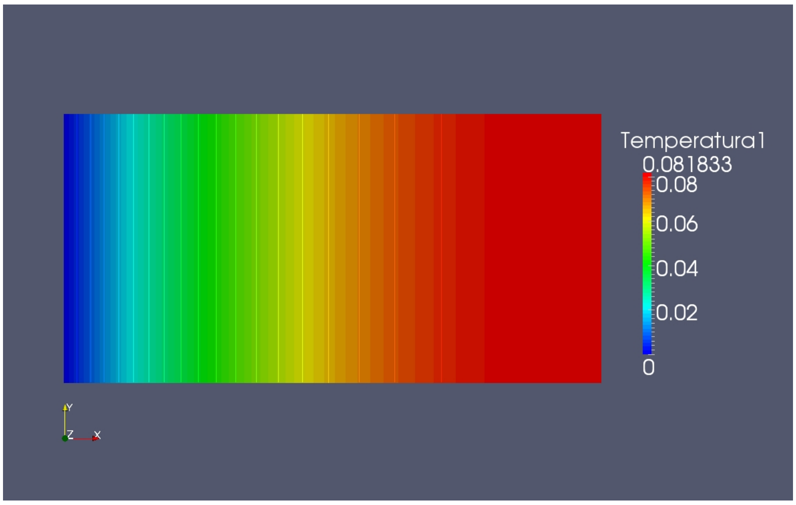

Figura 6: Ejemplo 2: distribución de temperatura para $n = 1$

Si tomamos $n = 2$, tenemos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ xy \\ x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y & 3x^2 & 2xy & y^2 \\ 0 & 0 & x & 0 & x^2 & 2xy \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y & 3x^2 & 2xy & y^2 \\ 2x & 4x^2 & 2xy & 6x^3 & 4x^2y & 2xy^2 \\ y & 2xy & x^2+y^2 & 3x^2y & 2xy^2+x^3 & y^3+2x^2y \\ 3x^2 & 6x^3 & 3x^2y & 9x^4 & 6x^3y & 3x^2y^2 \\ 2xy & 4x^2y & 2xy^2+x^3 & 6x^3y & 4x^2y^2+x^4 & 2xy^3+2x^3y \\ y^2 & 2xy^2 & y^3+2x^2y & 3x^2y^2 & 2xy^3+2x^3y & y^4+4x^2y^2 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Luego:

$$\boldsymbol{F} = \int_0^{l_x}\int_0^{l_x} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l_x}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{l_y}\boldsymbol{X}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} 0{,}8106 \\ 0{,}9641 \\ 0{,}4053 \\ 1{,}2712 \\ 0{,}4821 \\ 0{,}2410 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{K} = k\int_0^{l_x}\int_0^{l_x} \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 & 80 & 20 & 20/3 \\ 40 & 320/3 & 20 & 240 & 160/3 & 40/3 \\ 10 & 20 & 100/3 & 40 & 160/3 & 95/3 \\ 80 & 240 & 40 & 576 & 120 & 80/3 \\ 20 & 160/3 & 160/3 & 120 & 896/9 & 50 \\ 20/3 & 40/3 & 95/3 & 80/3 & 50 & 356/9 \end{bmatrix} \tag{50}$$

de donde

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0{,}08927 \\ -0{,}02464 \\ 0{,}00324 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}00324 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Finalmente, para $n = 2$, la distribución de temperaturas en el dominio puede aproximarse como

$$T = 0{,}08927x - 0{,}02464x^2 + 0{,}0324xy - 0{,}0324xy^2 = T(x, y) \tag{52}$$

Esta solución es graficada en la Figura 7.

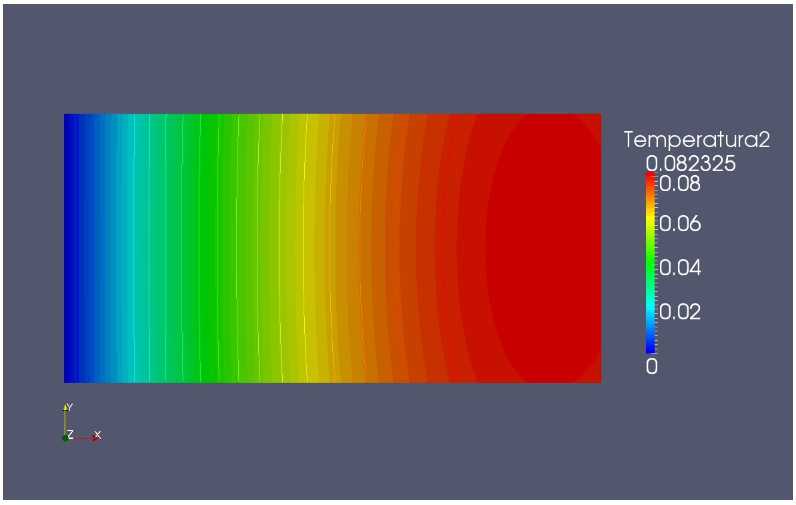

Figura 7: Ejemplo 2: distribución de temperatura para $n = 2$

La Figura 8 permite comparar las aproximaciones para $n = 1$ y $n = 2$.

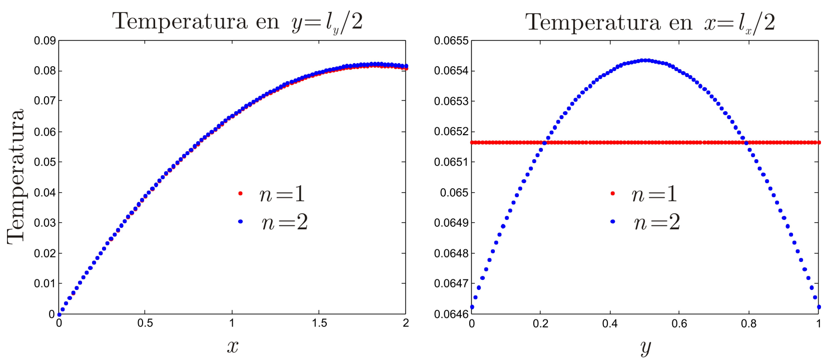

Figura 8: Ejemplo 2: temperatura a lo largo de las líneas $y = l_y/2$ y $x = l_x/2$ para $n = 1$ y $n = 2$