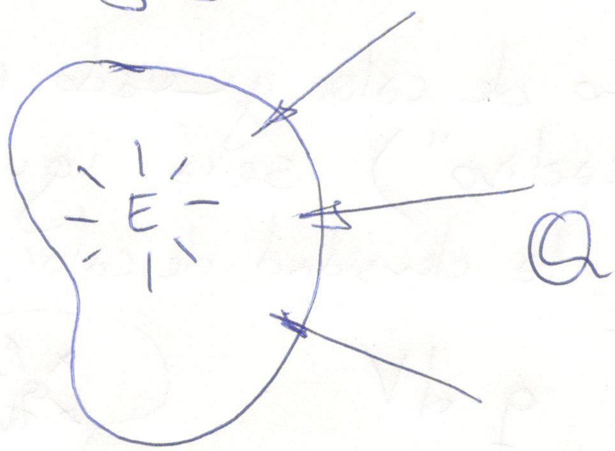
Balance de energía

Cuando el proceso térmico es dominante, podemos considerar la ecuación de balance de energía en forma independiente.

La ley de conservación (o balance) de energía es la 1era ley de la Termodinámica. En este desarrollo ignoramos los efectos mecánicos (suponemos que su influencia es despreciable frente a la energía térmica puesta en juego).



La <u>energía interna de un cuerpo</u> puede escribirse en la forma

$$E = \int_V \rho\, \varepsilon \, dV$$

donde ε es la densidad de energía interna por unidad de masa. La primera ley de la termodinámica para un sistema en reposo, dice que el cambio de energía del cuerpo es igual al calor absorbido

$$\Delta E = Q$$

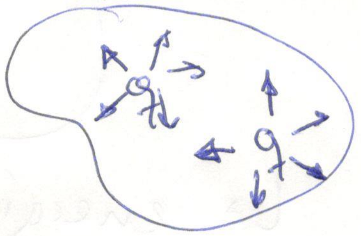
En términos de tasa escribimos, en la unidad de tiempo:

$$\frac{D}{Dt} E = \dot{Q}$$

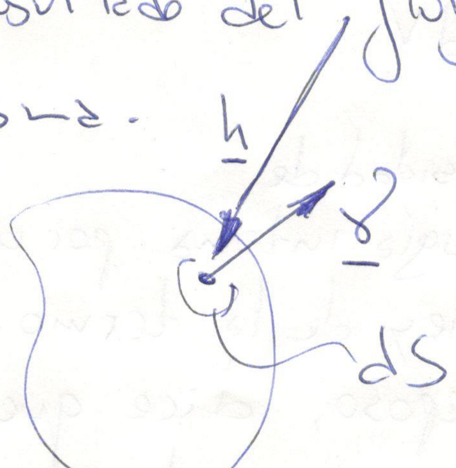
El calor absorbido por el cuerpo (tasa de calor por unidad de tiempo $\dot{Q}$) está formado por un término de calor que pasa a través de la frontera más un término de generación interna en el volumen.

El término de calor generado en el volumen, (término "reactivo") será igual a la integral de la densidad de calor distribuido q

$$\int_V q \, dV$$



El calor absorbido a través de la frontera, es el resultado del flujo de calor $\underline{h}$ que atraviesa la misma.



Si $\underline{\gamma}$ es el versor normal a la frontera en un punto, la densidad de calor que ingresa está dada por

$$-\underline{h}\cdot\underline{\gamma}\; dS = -h_i \gamma_i \, dS$$

Luego, el calor ingresado por la frontera es la integral en la frontera:

$$-\int_S h_i \gamma_i \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} -\int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dV = \\ = -\int_V \operatorname{div} \underline{h} \, dV$$

Así:

$$\dot{Q} = \int_V q \, dV - \int_V \operatorname{div} \underline{h} \, dV = \\ = \frac{D}{Dt}\int_V \rho \varepsilon \, dV$$

Estando el cuerpo en reposo:

$$\int_V \left(\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}\varepsilon} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dV = \int_V q \, dV - \int_V \operatorname{div} \underline{h} \, dV$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (continuidad)

Como V es arbitrario:

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = q - \operatorname{div} \underline{h} \qquad (*)$$

La ley de Fourier dice que el flujo de calor está orientado en dirección opuesta al gradiente de temperatura (o sea el flujo de calor va de temperaturas altas a temperaturas bajas)

$$\underline{h} = - \lambda \, \underline{\nabla} T \qquad (**)$$

conductividad (asumimos constante)

La conductividad es una propiedad del material. En el caso de un material isótropo, esta propiedad es un escalar (la conductividad es la misma en todas las direcciones).

La energía interna para un sólido en reposo podemos escribirla:

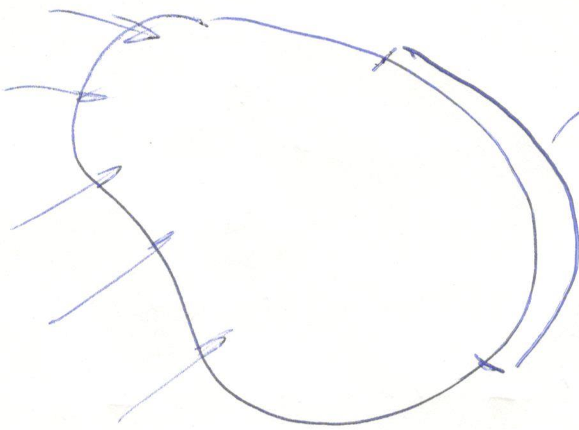
$$\mathcal{E} = c\, T \qquad (***)$$

calor específico (propiedad del material, constante)

Luego, reemplazando (**) y (***) en (*), tenemos:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = q + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \quad \text{en } V$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales se completa c/ condiciones de borde e iniciales



$T = \bar{T}$ en Γ_T, t

$\lambda \underline{\nabla} T \cdot \underline{\nu} = \bar{\phi}$ en Γ_ϕ, t

$T = T_0$ en V, $t = 0$