PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Víctor Fachinotti

Cátedra de Mecánica del Continuo, Carrera de Ingeniería Informática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral (UNL), vfachino@intec.unl.edu.ar, http://www.cimec.org.ar/twiki/bin/view/MC/WebHome

1. DESPLAZAMIENTO VIRTUAL

Sea un cuerpo $\mathcal{B}$ en equilibrio bajo la acción de fuerzas de cuerpo $\boldsymbol{b}$ y de superficie $\boldsymbol{t}$. La frontera $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}$ está dividida en dos partes:

$$\mathcal{S}_u \qquad \text{con desplazamiento } \bar{\boldsymbol{u}} \text{ prescrito,} \tag{1}$$

$$\mathcal{S}_\sigma \qquad \text{con tracción de superficie } \bar{\boldsymbol{t}} \text{ prescrita.} \tag{2}$$

Asumimos que el problema tiene solución, es decir, existe un campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}$ que satisface las ecuaciones de equilibrio estático y las condiciones de borde.

Sea

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u} \tag{3}$$

otro campo de desplazamiento que, si bien arbitrario, satisface la condición de borde en la porción $\mathcal{S}_u$ de la frontera $\mathcal{S}$, o sea

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{u}} \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_u \tag{4}$$

Luego, $\delta\boldsymbol{u}$ debe satisfacer:

$$\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \text{sobre } \mathcal{S}_u \tag{5}$$

pero es arbitraria en $\mathcal{S}_\sigma$.

Pediremos además que $\delta\boldsymbol{u}$ sea suficientemente suave (esto, continua y de derivadas parciales continuas hasta un orden suficientemente grande) y que su magnitud sea suficientemente pequeña como para que el material se mantenga en rango elástico. Un desplazamiento arbitrario $\delta\boldsymbol{u}$ que cumpla todas estas condiciones se denomina **desplazamiento virtual**.

2. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Supongamos que el cuerpo $\mathcal{B}$ se halla en equilibrio bajo la acción de cargas externas superficiales $\bar{t}_i$ y de cuerpo X_i, o sea:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \qquad \text{en } \mathcal{B} \tag{6}$$

$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{en } \mathcal{S}_u \tag{7}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \qquad \text{en } \mathcal{S}_\sigma \tag{8}$$

Multipliquemos la equación de equilibrio por el desplazamiento virtual δu_i y luego integremos sobre $\mathcal{B}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij,j}\delta u_i \,\mathrm{d}V = -\underbrace{\int_{\mathcal{B}} X_i \delta u_i \,\mathrm{d}V}_{\text{trabajo virtual de } X_i} \tag{9}$$

La integral del lado derecho representa el trabajo realizado sobre todo el cuerpo $\mathcal{B}$ por las fuerzas de cuerpo X_i debido a los desplazamientos virtuales δu_i, llamado **trabajo virtual** de X_i.

El lado izquierdo de la ecuación (9) se puede descomponer en dos términos:

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij,j}\delta u_i \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} \,\mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}\delta u_{i,j} \,\mathrm{d}V \tag{10}$$

Apliquemos el **teorema de Gauss** al primer término del lado derecho:

$$\int_{\mathcal{B}} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}} (\sigma_{ij}\delta u_i) n_j \,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} (\sigma_{ij} n_j)\delta u_i \,\mathrm{d}S \tag{11}$$

Como $\delta u_i = 0$ sobre $\mathcal{S}_u$:

$$\int_{\mathcal{B}} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}_\sigma} (\sigma_{ij} n_j)\delta u_i \,\mathrm{d}S \tag{12}$$

Sobre $\mathcal{S}_\sigma$, tenemos la condición de borde $\bar{t}_i = \sigma_{ij} n_j$, así que el primer término del lado derecho de la ecuación (10) resulta finalmente

$$\int_{\mathcal{B}} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} \,\mathrm{d}V = \underbrace{\int_{\mathcal{S}_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i \,\mathrm{d}S}_{\text{trabajo virtual de } \bar{t}_i} \tag{13}$$

La integral del lado derecho define el trabajo realizado sobre todo el cuerpo $\mathcal{B}$ por las tracciones superficiales $\bar{t}_i$ debido a los desplazamientos virtuales δu_i, o **trabajo virtual** de $\bar{t}_i$.

Ahora, por la simetría de σ_{ij}, el segundo término del lado derecho de la ecuación (10) puede escribirse como

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}\delta u_{i,j} \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}\delta u_{i,j} \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\sigma_{ji}\delta u_{i,j}}_{=\sigma_{ij}\delta u_{j,i}} \,\mathrm{d}V \right) = \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij} \frac{\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}}{2} \,\mathrm{d}V \tag{14}$$

Definimos la deformación e_{ij} debida a los desplamientos u_i como

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{15}$$

Luego, la deformación debida a los desplazamientos virtuales es

$$\frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \delta e_{ij} \tag{16}$$

La ecuación (14) puede escribirse entonces como

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}\delta u_{i,j}\,\mathrm{d}V = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}\delta e_{ij}\,\mathrm{d}V}_{\text{trabajo virtual de } \sigma_{ij}} \tag{17}$$

Este el trabajo realizado sobre todo el cuerpo por las tensiones σ_{ij} debido a los desplazamientos virtuales δu_i que inducen la deformación δe_{ij}, o **trabajo virtual** de σ_{ij}.

Con las ecuaciones (13) y (14), la ecuación (10) resulta

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij,j}\delta u_i\,\mathrm{d}V = \underbrace{\int_{\mathcal{S}_\sigma} \bar{t}_i\delta u_i\,\mathrm{d}S}_{\text{trabajo virtual de } \bar{t}_i} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}\delta e_{ij}\,\mathrm{d}V}_{\text{trabajo virtual de } \sigma_{ij}} \tag{18}$$

Con esta ecuación en la ecuación (9) llegamos a

$$\underbrace{\underbrace{\int_{\mathcal{B}} X_i\delta u_i\,\mathrm{d}V}_{\text{trabajo virtual de } X_i} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_\sigma} \bar{t}_i\delta u_i\,\mathrm{d}S}_{\text{trabajo virtual de } \bar{t}_i}}_{\text{trabajo virtual externo}} \underbrace{\underbrace{\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}\delta e_{ij}\,\mathrm{d}V}_{\text{trabajo virtual de } \sigma_{ij}}}_{\text{trabajo virtual interno}} \tag{19}$$

Este es el **principio de los trabajos virtuales (PTV):** para un cuerpo en equilibrio sujeto a desplazamientos virtuales (admisibles, arbitrarios), el trabajo realizado por los esfuerzos externos (las tracciones superficiales $\bar{t}_i$ y las fuerzas de cuerpo X_i) es igual al trabajo realizado por los esfuerzos internos (las tensiones σ_{ij}).

El PTV (19) es la forma integral de la ecuación de equilibrio (6). De hecho, se dice que el PTV es la forma débil de la ecuación equilibrio (6), pues las condiciones de suavidad sobre la función solución u_i son más débiles en el PTV que en la ecuación de equilibrio (6). La ecuación de equilibrio (6) involucra derivadas primeras de las tensiones σ_{ij}, o sea derivadas primeras de las deformaciones e_{ij}, o sea derivadas segundas de los desplazamientos u_i. El PTV involucra a las tensiones σ_{ij} sin derivar, o sea derivadas primeras de los desplazamientos u_i.