Principios variacionales: aplicación a la ecuación del calor

Sea un cuerpo en equilibrio térmico estacionario, bajo la acción de fuentes distribuidas q en el volumen, y $\bar{\phi}$ en la superficie Γ_ϕ.

La frontera del cuerpo Γ, la consideramos dividida en dos partes:

$\Gamma_T \longrightarrow$ temperatura $\bar{T}$ prescripta

$\Gamma_\phi \longrightarrow$ flujo de calor entrante $\bar{\phi}$ impuesto

Asumimos que existe un campo de temperaturas T que satisface las ecs de balance de energía estacionario, y las condiciones de borde:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + q = 0 \quad \text{en } V$$

$$T = \bar{T} \quad \text{en } \Gamma_T$$

$$\underbrace{\lambda \underline{\nabla} T}_{-\underline{h}} \cdot \underline{\nu} = \bar{\phi} \quad \text{en } \Gamma_\phi$$

Sea

$$T + \delta T$$

una clase de perturbaciones del campo de temperaturas arbitraria, consistente con las condiciones de borde impuestas (decimos "variación de T").

Notar que $\delta T = 0$ sobre Γ_T

pero es arbitrario en Γ_ϕ

Asumimos δT diferenciable.

Calcularemos el "trabajo térmico virtual" hecho por los flujos externos impuestos bajo perturbación virtual de temperaturas δT:

$$\delta W_{ext} = \int_V q \, \delta T \, dV + \int_{\Gamma_\phi} \bar{\phi} \, \delta T \, dS = ?$$

Usando Gauss, en el segundo término:

$$\int_{\Gamma_\phi} \bar{\phi} \, \delta T \, dS \underset{\text{porque } \delta T|_{\Gamma_T} = 0}{=} \int_{\Gamma_\phi \oplus \Gamma_T = \Gamma} (-\underline{h} \cdot \underline{\nu}) \, \delta T \, dS \underset{\text{Gauss}}{=}$$

$$= -\int_V \operatorname{div}(\delta T \, \underline{h}) \, dV =$$

$$= -\int_V \underline{h}\cdot\underline{\nabla}(\delta T)\,dV - \int_V \delta T\,\underline{\nabla}\cdot\underline{h}\;dV$$

Usando la ecuación de equilibrio:

$$-\underline{\nabla}\cdot\underline{h} + q = 0$$

tenemos:

$$\int_{\Gamma_\phi} \bar{\phi}\,\delta T\,dS = -\int_V \underline{\nabla}(\delta T)\cdot\underline{h}\,dV - \int_V \delta T\,q\,dV$$

Finalmente, usando $\underline{h} = -\lambda\underline{\nabla}T$:

$$\boxed{\underbrace{\int_{\Gamma_\phi} \bar{\phi}\,\delta T\,dS + \int_V \delta T\,q\,dV}_{\text{Trabajo virtual externo}} = \underbrace{\int_V \underline{\nabla}(\delta T)\cdot(\lambda\,\underline{\nabla}T)\,dV}_{\text{Trabajo virtual interno}}}$$

$\forall\ \delta T$ admisible

$\left(\delta T\big|_{\Gamma_T} = 0\right)$

Para un sistema en equilibrio, el trabajo virtual de las cargas internas es igual al trabajo virtual de las cargas externas

Puede mostrarse fácilmente que un sistema para el cual el trabajo virtual externo iguala al trabajo virtual interno, verifica las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de borde (ver + adelante ecuaciones de elasticidad).