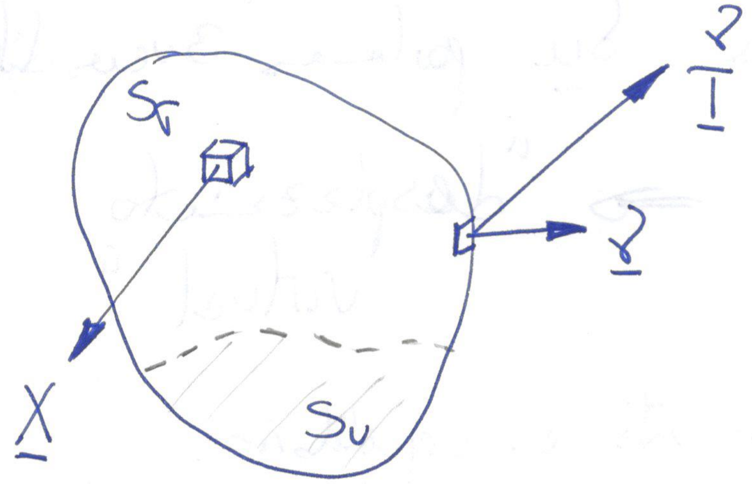
PRINCIPIOS VARIACIONALES: Aplicación a ecuaciones de la elasticidad



$\boxed{\text{Principio de Trabajos Virtuales}}$

Sea un cuerpo en <u>equilibrio estático</u> bajo la acción de cargas de cuerpo $\underline{X}$ y de superficie $\underset{\sim}{T}$. La frontera S está dividida en dos partes

$S_u \rightarrow$ desplazamiento $\underline{u}$ prescripto

$S_T \rightarrow$ tracción de superficie $\underset{\sim}{T}$ prescripta.

Asumimos existe un desplazamiento $\underline{u}$ que satisface las ecs de equilibrio estático y las condiciones de borde.

Sea $\underline{u} + \delta \underline{u}$

una clase de desplazamientos arbitrarios consistente con las condiciones de borde impuestas en el cuerpo.

(Decimos δu "variación de $\underline{u}$")

Nota que debe ser $\delta \underline{u} = 0$ sobre S_u, (2)
pero que es arbitrario sobre S_σ.

Asumimos además $\delta \underline{u}$ por lo menos 3 veces diferenciable.

Llamamos $\delta \underline{u} \Rightarrow$ "desplazamiento virtual"

Asumimos el cuerpo está en equilibrio.

Calculamos el "trabajo virtual" hecho por las fuerzas externas bajo el desplaz virtual:

$$\int_V X_i \, \delta u_i \, dV + \int_{S_\sigma} \overset{\nu}{T}_i \, \delta u_i \, dS$$

Usando la fórmula de Cauchy, $\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ij} \nu_j$ y tenemos:

$$\int_S \overset{\nu}{T}_i \delta u_i \, dS = \int_S \sigma_{ij} \, \delta u_i \, \nu_j \, dS \underset{\text{t Gauss}}{=}$$

$$= \int_V (\sigma_{ij} \, \delta u_i)_{,j} \, dV =$$

$$= \int_V \sigma_{ij,j} \, \delta u_i \, dV + \int_V \sigma_{ij} \, \delta u_{i,j} \, dV$$

(*)

Usando la ec. de equilibrio, el 1er término:

$$\int_V \sigma_{ij,j}\, \delta u_i \, dV = -\int_V X_i \, \delta u_i \, dV$$

Por la simetría de σ_{ij}, el 2º término:

$$\int_V \sigma_{ij}\, \delta u_{i,j}\, dV = \int_V \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\, \delta u_{i,j} + \sigma_{ji}\, \delta u_{i,j}\right) dV$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\, \delta u_{i,j} + \sigma_{ij}\, \delta u_{j,i}\right) dV =$$

$$= \int_V \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right)\right] dV =$$

$$= \int_V \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}\, dV$$

Reemplazando en (*):

$$\overbrace{\int_V X_i\, \delta u_i\, dV + \int_{S_\sigma} \tilde{T}_i\, \delta u_i\, dS}^{\text{Trabajo virtual de fzas exteriores}} = \overbrace{\int_V \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}\, dV}^{\text{Trabajo virtual de fzas interiores}}$$

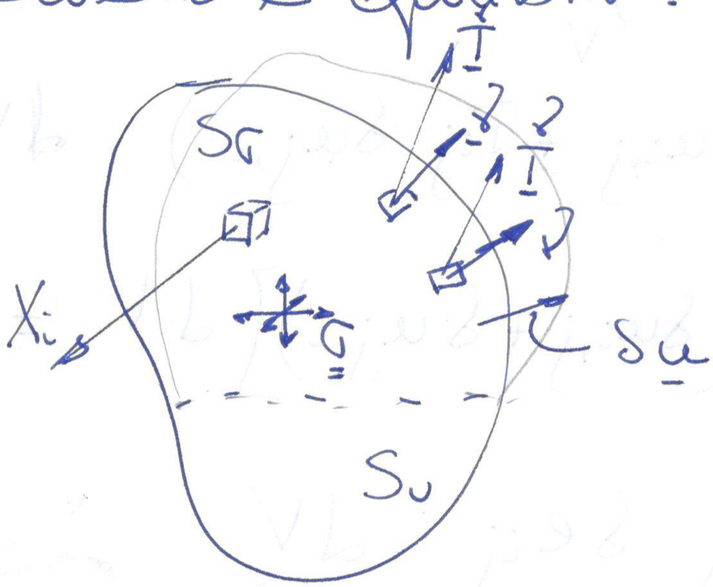
Principio de Trabajos Virtuales

Sólo sobre S_σ porque

$$\delta u_i \big|_{S_u} = 0$$

O sea, que p/un cuerpo en equilibrio, el trabajo virtual de las fuerzas externas iguala al trabajo virtual interno, bajo desplazamientos virtuales admisibles arbitrarios.

A la inversa, veremos que si se cumple el principio de trabajos virtuales, el cuerpo se encuentra en equilibrio.



Sea un cuerpo sometido a cargas externas $\overset{?}{\underline{T}}$ en superficie S_σ y $\underline{X}$ en el volumen, con un estado de tensiones $\underline{\underline{\sigma}}$. Para ese estado de cargas, se cumple,

$$\int_V X_i \, \delta u_i \, dV + \int_{S_\sigma} \overset{?}{T_i} \, \delta u_i \, dS = \int_V \sigma_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} \, dV$$

$\forall \; \delta u_i$ admisible

Pero

$$\sigma_{ij}\,\delta e_{ij} = \sigma_{ij}\,\tfrac{1}{2}\left(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}\right) = \sigma_{ij}\,\delta u_{i,j}$$

$\therefore$

$$\int_V \sigma_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV = \int_V \sigma_{ij}\,\delta u_{i,j}\,dV = \int_V \left(\sigma_{ij}\,\delta u_i\right)_{,j}\,dV - \int_V \sigma_{ij,j}\,\delta u_i\,dV =$$

$$\underset{\text{Gauss}}{=} \int_S \sigma_{ij}\,\nu_j\,\delta u_i\,dS - \int_V \sigma_{ij,j}\,\delta u_i\,dV$$

Reemplazando:

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j}+X_i\right)\delta u_i\,dV + \int_{S_\sigma} \overset{\nu}{T}_i\,\delta u_i\,dS - \int_S \sigma_{ij}\,\nu_j\,\delta u_i\,dS = 0$$

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j}+X_i\right)\delta u_i\,dV + \int_{S_\sigma} \left(-\sigma_{ij}\,\nu_j+\overset{\nu}{T}_i\right)\delta u_i\,dS - \underbrace{\int_{S_u} \sigma_{ij}\,\nu_j\,\delta u_i}_{0 \text{ porque } \delta u_i|_{S_u}=0} = 0$$

Siendo δu_i arbitrario, debe ser

Ecs equilibrio estático

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sigma_{ij,j}+X_i = 0 & \text{en } V \\ \overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ij}\,\nu_j & \text{sobre } S_\sigma \end{array}}$$