Universidad Nacional del Litoral
FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS HÍDRICAS

Departamento de Informática

Mecánica del Continuo

Examen Recuperatorio – 10/6/19

Apellido y nombre:

DNI:

1. Una función $f(x)$ es expandida en una serie de Taylor (en coordenadas cartesianas) de la forma

$$f(x) = a + b_i x_i + \frac{1}{2} c_{ij} x_i x_j + \dots,$$

De la misma manera $(f(x))^2$ puede ser escrita:

$$(f(x))^2 = A + B_i x_i + \frac{1}{2} C_{ij} x_i x_j + \dots.$$

   a. Determine A, B_i, y C_{ij} en términos de a, b_i, y c_{ij}

   b. Calcule la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Simplifique las expresiones tanto como sea posible.

2. El estado de tensión en un continuo, con respecto a un sistema de ejes Cartesianos $\{Ox_1x_2x_3\}$, está dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 3x_2^2 & 0 \\ 3x_2^2 & 0 & -2x_3 \\ 0 & -2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar el vector de tensión que actúa en el punto $P(1,1,1)$, en el plano tangente en *P* a la superficie esférica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$.

3. Si $\dfrac{du}{dt} = u \times \omega$ y $\dfrac{dv}{dt} = v \times \omega$, utilizando notación indicial muestre que

$$\frac{d}{dt}(u \times v) = (u \times v) \times \omega$$

4. Explicar la noción de continuo. Qué dimensiones debe poseer? Dé ejemplos de cuando puede aplicarse esta noción.

1) a)

$$f(\underline{x}) = a + b_i x_i + \frac{1}{2} c_{ij} x_i x_j + \dots$$

$$f(\underline{x})^2 = A + B_i x_i + \frac{1}{2} C_{ij} x_i x_j + \dots$$

$$f(\underline{x})^2 = \left(a + b_i x_i + \frac{1}{2} c_{ij} x_i x_j + \dots\right)\left(a + b_r x_r + \frac{1}{2} c_{rs} x_r x_s + \dots\right)$$

$$= \cancel{a^2} + \cancel{a b_r x_r} + \frac{a}{2} c_{rs} x_r x_s + \cancel{a b_i x_i} + b_i b_r x_i x_r + \frac{b_i}{2} c_{rs} x_i x_r x_s + \frac{a}{2} c_{ij} x_i x_j + \dots$$

$$= a^2 + 2ab_i x_i + \left(a c_{ij} + b_i b_j\right) x_i x_j + \dots$$

$\therefore$

$$A = a^2$$

$$B_i = 2ab_i$$

$$C_{ij} = 2\left(a c_{ij} + b_i b_j\right)$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a + b_r x_r + \frac{c_{rs}}{2} x_r x_s\right) =$$ (2)

$$= 0 + b_r \delta_{ir} + \frac{c_{rs}}{2} \delta_{ir} x_s + \frac{c_{rs}}{2} x_r \delta_{is}$$

$$= b_i + \frac{c_{is}}{2} x_s + \frac{c_{si}}{2} x_s =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = b_i + \frac{1}{2}\left(c_{is} + c_{si}\right) x_s$$

(2) $$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 3x_2^2 & 0 \\ 3x_2^2 & 0 & -2x_3 \\ 0 & -2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

S] $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$

$P(1,1,1)$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\Big|_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4

3) $\frac{du_i}{dt} = \varepsilon_{ijk} u_j \omega_k = \dot{u}_i$

$\dot{v}_i = \varepsilon_{ilm} v_l \omega_m$

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{ijk} u_j v_k\right) = \varepsilon_{ijk} \dot{u}_j v_k + \varepsilon_{ijk} u_j \dot{v}_k =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} u_l \omega_m v_k + \varepsilon_{ijk} u_j \varepsilon_{klm} v_l \omega_m =$$

$$= \left(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{li}\right) u_l \omega_m v_k +$$

$$+ \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) u_j v_l \omega_m =$$

$$= \cancel{u_k v_k \omega_i} - u_i v_k \omega_k + u_m v_i \omega_m - \cancel{u_l v_l \omega_i}$$

$$= -u_i v_k \omega_k + u_k v_i \omega_k =$$

$$= \left(u_k v_i - u_i v_k\right) \omega_k \quad (*)$$

Por otro lado $(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{\omega}$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} u_l v_m \omega_k =$$

$$= \left(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{li}\right) u_l v_m \omega_k =$$

$$= u_k v_i \omega_k - u_i v_k \omega_k =$$

$$= \left(u_k v_i - u_i v_k\right) \omega_k \quad (*)$$

=