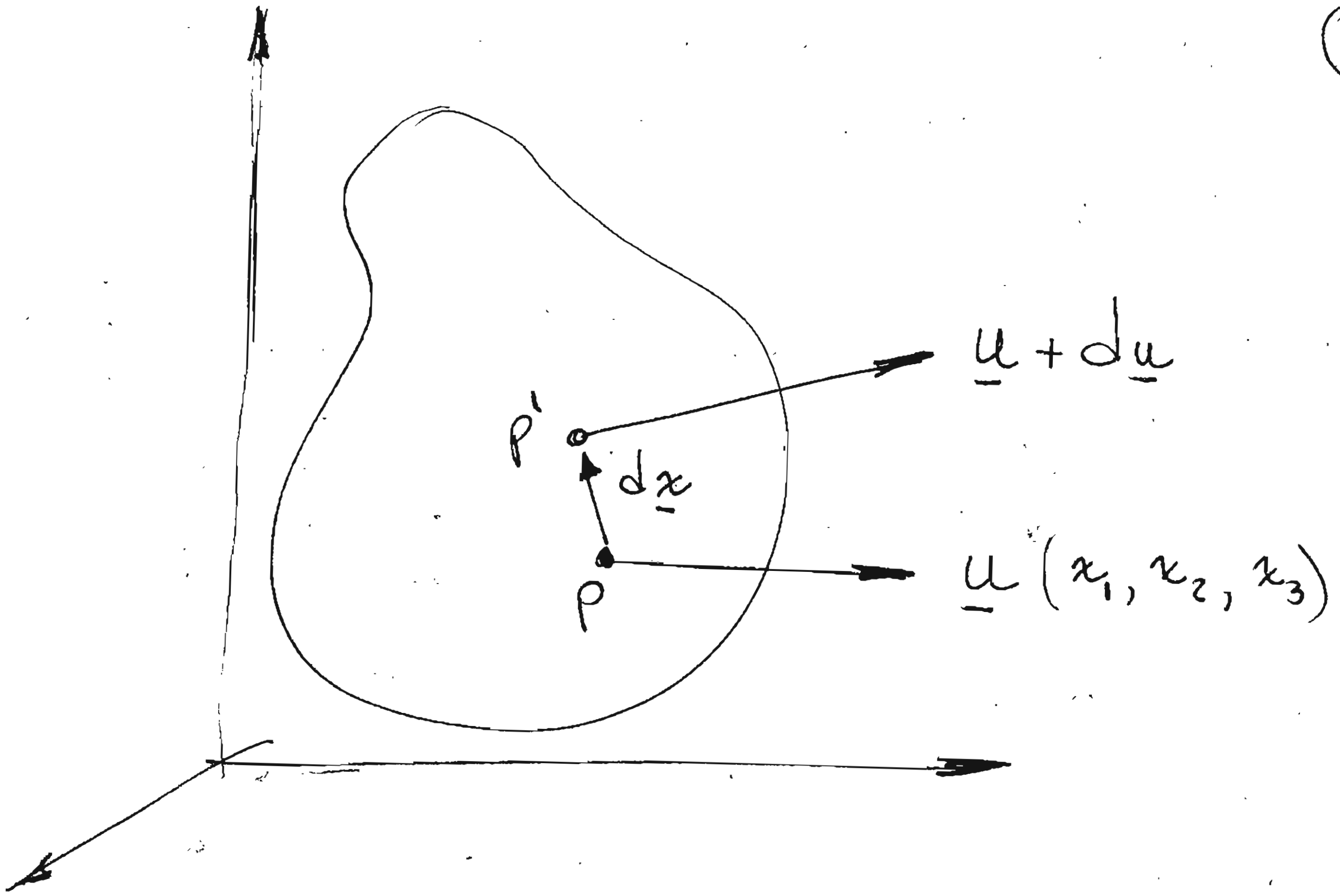


Sean dos puntos vecinos, P y P', separados por una distancia $d\underline{x}$.

Sea

$$\underline{u}\,(x_1, x_2, x_3)$$

un campo de velocidad, continuo y diferenciable.

La velocidad en el punto P será:

$$\underline{u}\,(\underline{x})$$

en tanto en el punto P' tendremos:

$$\underline{u} + d\underline{u}$$

La diferencia de velocidades entre ambos:

$$d\underline{u} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\, d\underline{x}$$

Trabajando algebraicamente, puedo descomponer en suma de contrib simétrica y contrib antisimétrica:

$$du_i = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{V_{ij}} dx_j + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{-\omega_{ij}} dx_j$$

V_{ij} tensor de velocidad de deformaciones ~~[illegible]~~ (simétrico)

O sea, el campo de velocidad relativa al punto P, está dado por la suma de una contribución relacionada con el tensor de deformación en P, y una segunda contribución relacionada con un tensor antisimétrico que llamamos ω_{ij}:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\omega_{ji} \quad \underline{AS}$$

Al ser antisimétrico, ω_{ij} tiene sólo 3 componentes independientes $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$. Construimos así un vector dual:

$$\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij}\, \omega_{ij}$$

Usando la identidad e-δ, se ve que

~~$\omega_k = \frac{1}{2}$~~

$$e_{lmk}\, \omega_k = \frac{1}{2} e_{lmk}\, e_{kij}\, \omega_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta_{li}\,\delta_{mj} - \delta_{lj}\,\delta_{mi}\right) w_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(w_{lm} - w_{ml}\right)$$

Luego, al ser $w_{lm} = -\,w_{ml}$ tenemos:

$$e_{ijk}\, w_k = w_{ij}$$

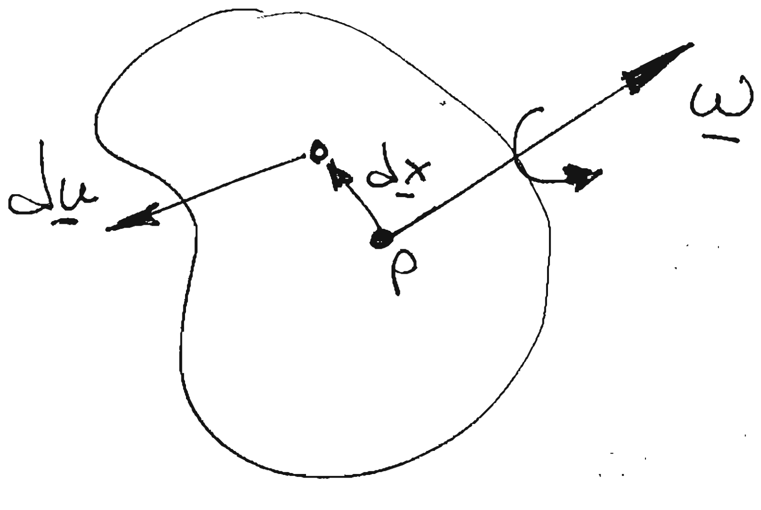
Para darle un sentido físico al tensor w_{ij} y su vector dual w_k, asumimos que el continuo esté animado de un movimiento a velocidad de deformación nula. Luego:

$$du_i = -\,w_{ij}\, dx_j = -\,e_{ijk}\, w_k\, dx_j =$$

$$= e_{ijk}\, w_j\, dx_k$$

Vectorialmente:

$$d\underline{u} = \underline{w} \times d\underline{x}$$



Osea, que la velocidad relativa a P, en un entorno de este punto, corresponde con la velocidad de que está animado los puntos de un cuerpo rígido que rote con una velocidad $\underline{\omega}$.

En consecuencia, $\underline{\omega}$ es el llamado vector de velocidad de rotación en el punto, o vector de vorticidad. El tensor $\underline{\underline{\omega}}$ (dual de $\underline{\omega}$) es el tensor de vorticidad.

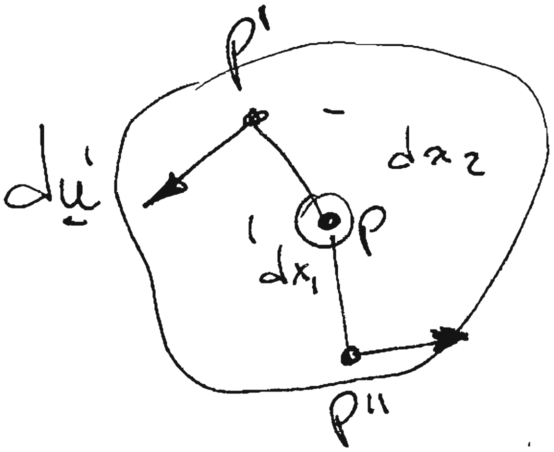
En un problema 2-D:

$$\underline{u} = (u_1, u_2, 0)$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 \\ \text{asim} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$d\underline{u} = \begin{pmatrix} -\omega_3 dx_2 \\ \omega_3 dx_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Repitiendo el análisis con un campo de desplazamiento

$$\underline{v} = \underline{u}\, dt$$

tendremos

$$dv_i = e_{ij}\, dx_j - \omega_{ij}\, dx_j$$

donde

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$ tensor de deformación infinitesimal

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$ tensor de rotaciones infinitesimales