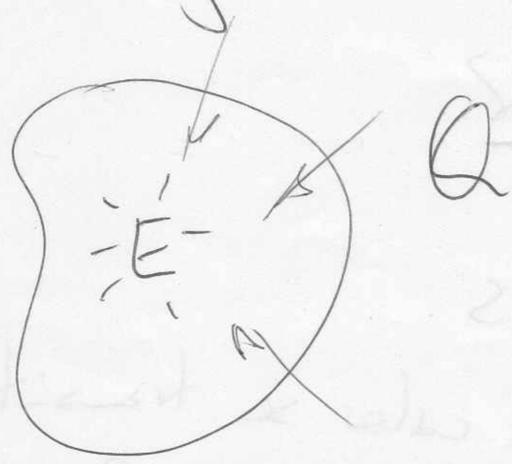
Balance de energía

Cuando el proceso térmico es dominante, podemos considerar la ecuación de balance de energía en forma independiente.

La ley de conservación de energía es la 1era ley de la termodinámica. En este desarrollo ignoramos los efectos mecánicos.



La energía interna de un cuerpo puede ser escrita en la forma:

$$E = \int \rho \varepsilon \, dV$$

donde ε es la energía interna por unidad de masa. para un sist en reposo

La primera ley de la termodinámica dice que el cambio de energía es igual al calor absorbido

$$\Delta E = Q$$

En términos de tasa:

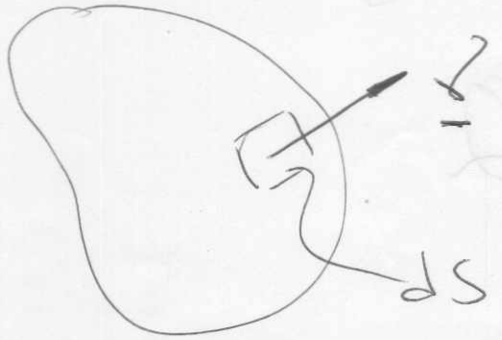
$$\frac{D}{Dt} E = \dot{Q}$$

tasa de cambio por unidad de tiempo

El calor absorbido por el cuerpo pasa a través de la frontera.

Definimos $\underline{h}$ vector flujo de calor de la siguiente manera:

Sea $d\underline{S}$ un elemento de superficie en el cuerpo, con normal unitaria hacia afuera $\underline{\nu}$



La tasa a la cual el calor se transmite a través de dS en la dirección $\underline{\nu}$ está dada por $\underline{h}\cdot\underline{\nu}\,dS = h_i \nu_i \, dS$

Luego, la tasa de entrada de calor al cuerpo es:

$$\dot{Q} = -\int_S h_i \nu_i \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} -\int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \, dV = -\int_V \mathrm{div}\, \underline{h} \, dV$$

Luego:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \varepsilon \, dV = -\int_V \operatorname{div} \underline{h} \; dV$$

Estando el cuerpo en reposo:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \rho \right) dV = -\int_V \operatorname{div} h \; dV$$

Como V es arbitrario, y como $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (continuidad)

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \operatorname{div} \underline{h}$$

Si se cumple la ley de Fourier, (el flujo está orientado contrario al gradiente de temperatura)

$$\underline{h} = - \mathcal{J} \lambda \underline{\nabla} T$$

conductividad

equiv mecánico del calor

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \mathcal{J} \, \underline{\nabla} \cdot \left(\lambda \underline{\nabla} T \right)$$

La energía interna para un sólido en reposo podemos escribirla:

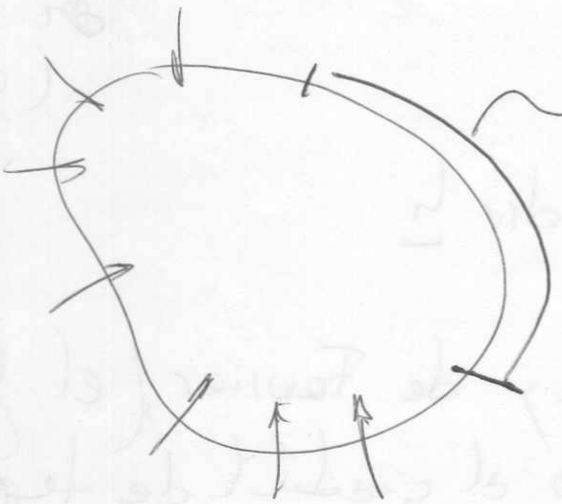
$$\mathcal{E} = \rho c T$$

$\quad\uparrow$ calor específico

Luego

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \quad \text{en } V}$$

Esta ecuación se completa c/ condiciones de borde e iniciales:



$T = \bar{T}$ en Γ_T, t

$$\underline{\nabla} T \cdot \underline{n} = \bar{h} \text{ en } \Gamma_h, t$$

$$T = T_0 \text{ en } t = 0$$

Sea un cuerpo en equilibrio térmico estacionario, bajo la acción de fuentes distribuidas q en el volumen, y $\bar{h}$ en la superficie S_h. La superficie exterior está dividida en dos partes

$S_T \rightarrow$ temperatura $\bar{T}$ prescripta

$S_h \rightarrow$ flujo de calor $\bar{h}$ impuesto

Asumimos existe un campo de temperaturas T que satisface las ecs de balance térmico estacionario y las condiciones de borde:

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x_i}\right) + q = 0 & \text{en } V \\ T = \bar{T} & \text{en } S_T \\ \underline{\nabla} T \cdot \underline{n} = \bar{h} & \text{en } S_h \end{array}\right.$$

Sea $T + \delta T$

una clase de perturbaciones del campo de temperaturas arbitraria, consistente con las condiciones de borde impuestas (decimos "variación de T")

Notar que

$$\delta T = 0 \quad \text{sobre } S_T$$

pero es arbitrario en S_h

Asumimos δT diferenciable. ~~[illegible]~~

Calculamos la "~~potencia virtual~~ trabajo térmico virtual" hecho por los flujos externos impuestos bajo perturbación virtual de temperatura δT:

$$\boxed{\int_V q\, \delta T\, dV + \int_S (\underline{h} \cdot \underline{n})\, \delta T\, dS} = \, ?$$

~~Usando la ley de Fourier en el contorno:~~

Usando $\underline{h} =$ Gauss:

$$\cancel{\int_S \delta T\, \underline{h}\circ\underline{\gamma}\, dS = \int_V \mathrm{div}(\delta T\, \underline{h})\, dV =}$$

$$\cancel{= \int_V \mathrm{div}(\delta T)\, \underline{h}\, dV + \int_V \delta T\, \mathrm{div}\, \underline{h}\, dV}$$

$$\int_S \delta T \left(\underline{h}\bullet\underline{\gamma}\right) dS = \int_V \mathrm{div}(\delta T\, \underline{h})\, dV =$$

$$= \int_V \underline{h} \bullet \underline{\nabla}(\delta T)\, dV + \int_V \delta T\, \underline{\nabla}\bullet\underline{h}\, dV$$

Usando la ecuación de equilibrio:

$$\underline{\nabla}\circ\underline{h} = -q$$

$\therefore$

$$\int_S \delta T\, \underline{h}\bullet\underline{\gamma}\, dS = \int_V \underline{\nabla}(\delta T)\circ\underline{h}\, dV - \int_V \delta T\, q\, dV$$

$$\overbrace{\int_V \delta T\, q\, dV + \int_{S_h} \delta T\, \underline{h}\bullet\underline{\gamma}\, dS}^{\text{Trabajo virtual externo}} = \overbrace{\int_V \underline{\nabla}(\delta T)\circ\left(\lambda\, \underline{\nabla}T\right) dV}^{\text{Trabajo virtual interno}}$$

$$\forall\ \delta T \text{ admisible } \left(\delta T\big|_{S_T} = 0\right)$$