Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Departamento de Informática

Mecánica del Continuo

Examen Recuperatorio – 02/07/2016

1. Sea un flujo *incompresible* de la forma

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1/r^2 & x_2/r^2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

donde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

   a. Verificar si el flujo satisface continuidad.

   b. Verificar si el flujo es irrotacional.

2. Sea el movimiento

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{a}, t) = \begin{bmatrix} a_1 + ta_2 & a_2 - t^2 a_1 & a_3 \end{bmatrix}^T$$

   a. Hallar el mapeo inverso

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

   b. Hallar el tensor de deformaciones de Green-Lagrange para $t = 1$.

   c. Hallar la velocidad y la aceleración para una partícula que pasa por $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ en el instante $t = 1$.

3. Sabemos que los tensores δ_{ij} y ε_{pqr} son isotrópicos.

   a. Defina tensor isotrópico.

   b. Dé la expresión de al menos dos tensores isotrópicos distintos de orden 6. Justifique.

4. Sean : Ω una región encerrada por una frontera S; $\mathbf{a}$ un vector arbitrario constante; $\mathbf{x}$ el vector posición; y $\mathbf{n}$ el versor unitario normal a la frontera. Usando el teorema de Gauss, demostrar que:

   a.

$$\int_S \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x})\, dS = 2\mathbf{a}V$$

   b.

$$\int_S \nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 6V$$

donde V es el volumen de la región Ω.

1) $\underline{V} = \begin{pmatrix} x_1/r^2 \\ x_2/r^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{1 \times 2 x_1}{2\sqrt{\ }} = \frac{x_1}{r}$$

a) $$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1 \times r^2 - 2r \,\partial r/\partial x_1 \, x_1}{r^4} = \frac{r^2 - 2\cancel{r}\, x_1/\cancel{r}\, x_1}{r^4} =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{r^4} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{r^4}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{1 \times r^2 - 2r \,\partial r/\partial x_2 \, x_2}{r^4} = \frac{r^2 - 2\cancel{r}\, x_2/\cancel{r}\, x_2}{r^4} =$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \qquad = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2}{r^4} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^4}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\cancel{x_2^2} - \cancel{x_1^2} + \cancel{x_1^2} - \cancel{x_2^2}}{r^4} = 0$$

$\therefore$ div $\underline{V} = 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{OK}}$

Verifica continuit

b) $\omega_i = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial v_k}{\partial x_j}$ $\qquad \omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$

$$\omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{0 - 2r \,\partial r/\partial x_1 \, x_2}{r^4} = - \frac{2\cancel{r}\, x_1/\cancel{r}\, x_2}{r^4} =$$

$$= - \frac{2 x_1 x_2}{r^4}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{0 - 2r \,\partial r/\partial x_2 \, x_1}{r^4} = - \frac{2 x_1 x_2}{r^4} \qquad \text{Irrot}$$

$$\therefore \omega_3 = - \frac{2 x_1 x_2}{r^4} + \frac{2 x_1 x_2}{r^4} = \underline{0}$$

2) $\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{a}, t) = \begin{pmatrix} a_1 + t a_2 \\ a_2 - t^2 a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$

a) $\underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -t^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\underline{a} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{x}$ $\qquad \det \underline{\underline{A}} = (1 + t^3)$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{1+t^3} \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ t^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^3+1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $a_1 = \frac{1}{1+t^3}(x_1 - t x_2)$

$a_2 = \frac{1}{1+t^3}(t^2 x_1 + x_2)$

$a_3 = x_3$

---

b) $E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right)$

$\underline{u} = \underline{x} - \underline{a}$

$\therefore$ $u_1 = t a_2$

$u_2 = -t^2 a_1$

$u_3 = 0$

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_2} = t \qquad \frac{\partial u_2}{\partial a_1} = -t^2$$

los demás son ceros!

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} t^2/2 & t-t^2 & 0 \\ t-t^2 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En t=1)

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \begin{bmatrix} a_2 \\ -2ta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha} = \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando de d:

$$\underline{v} = \frac{1}{1+t^3} \begin{bmatrix} t^2 x_1 + x_2 \\ -2t x_1 + 2t^2 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad *$$

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{1+t^3} \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_1 + 4t x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, en el instante 1, para $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notar que si se ~~...~~ calcula a partir de (*) la aceleración usando la derivada material:

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

se llega lógicamente a la misma expresión pero después de un trabajo mucho más largo y tedioso.

3)

(a) Un tensor isotrópico es un tensor cuyas componentes no varían frente a (rotaciones) transformaciones ortogonales arbitrarias β de coordenadas

Ej: δ_{ij} delta de Kronecker

$$\bar{\delta}_{ij} = \beta_{im}\beta_{jn}\,\delta_{mn} = \qquad \text{(definición de tens}$$
$$= \beta_{im}\beta_{jm} \qquad \text{(prop } \delta \text{ Kronecker}$$
$$= \delta_{ij} \qquad \text{(ortogonalidad)}$$

$$\therefore \quad \bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \text{isotrópico}$$

(b) Siendo δ_{ij} isotrópico y ε_{ijk} isotrópico puedo definir, por ejemplo:

$$C_{ijklmn} = \delta_{ij}\,\delta_{lm}\,\delta_{kn}$$

Por la isotropía de δ será:

$$\bar{C}_{ijklmn} = C_{ijklmn}$$

$$C_{ijklmn} = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}$$

$$C_{ijklmn} = \delta_{mn}\,\delta_{il}\,\delta_{jk}$$

etc.

4)

a) $\int_S \underline{n} \times (\underline{a} \times \underline{x})\, dS = 2\underline{a}V$

$\varepsilon_{ijk} n_j \varepsilon_{klm} a_l x_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} n_j a_l x_m =$

$= \delta_{il}\delta_{jm} n_j a_l x_m - \delta_{im}\delta_{jl} n_j a_l x_m$

$= n_m a_i x_m - n_j a_j x_i$

$\therefore \int_S n_m a_i x_m \, dS - \int_S n_j a_j x_i \, dS \underset{\text{Gauss}}{=}$

$= \int_V (a_i x_m)_{,m} dV - \int_V (a_j x_i)_{,j} \, dV =$

$= \int_V (a_i \delta_{mm} - a_j \delta_{ij}) \, dV =$

$= \int_V (3a_i - a_i) dV = 2a_i \int dV = 2a_i V$

$\therefore \int_S \underline{n} \times (\underline{a} \times \underline{x})\, dS = 2\underline{a}V$

b) $\int_S \nabla(\underline{x} \circ \underline{x}) \circ \underline{n} \, dS = 6V$

$$\int_S (x_i x_i)_{,j} \, n_j \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \int_V (x_i x_i)_{,jj} \, dV =$$

$$= \int_V (2x_{i,j} x_i)_{,j} \, dV = \int_V (2x_j)_{,j} \, dV =$$

$$= \int_V 2\delta_{jj} \, dV = 6\int_V dV = \underline{6V}$$