Departamento de Informática

Mecánica del Continuo

Universidad Nacional del Litoral

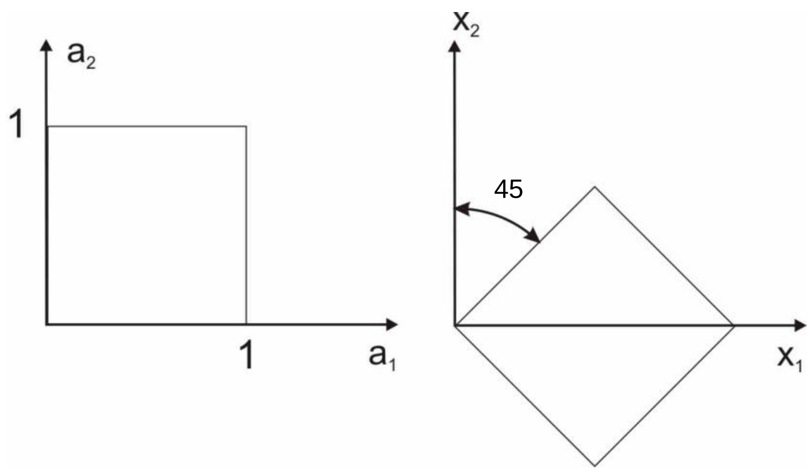
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Apellido y nombre:

DNI:

Examen Recuperatorio 01/07/2015

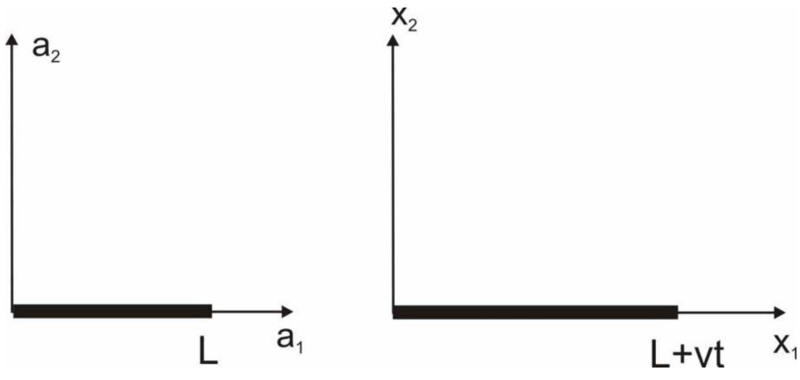
1. Demostrar las identidades siguientes usando notación indicial:
   a. $\text{rot}\,(\lambda \mathbf{a}) = \lambda\,\text{rot}\,(\mathbf{a}) + \nabla\lambda \times \mathbf{a}$
   b. $\text{div}\,(\psi\,\nabla\phi) = \psi\,\Delta\phi + \nabla\psi \bullet \nabla\phi$ donde $\Delta\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i\,\partial x_i}$.
2. En la figura, se muestra la deformación sufrida por un cuadrado de longitud unitaria:



Determinar:

   a. Campo de desplazamientos para la transformación homogénea mostrada.
   b. Puede aplicarse teoría de pequeñas deformaciones? Justificar.
   c. Puede aplicarse teoría de deformaciones finitas? Justificar.
   d. Calcular el tensor de deformaciones de Green-Lagrange. Interpretar y explicar el resultado.

3. En la figura, se muestra la deformación sufrida por una banda elástica en el tiempo.



a. Dar la posición x de una partícula material arbitraria de la banda, como función del tiempo t y su posición inicial a.

b. Dar la distribución de velocidad para los puntos de la banda elástica, como función:

   i. de la posición inicial a y el tiempo t.

   ii. de la posición actual x y el tiempo t.

c. Una mosca camina sobre la banda a una velocidad relativa w con respecto a la misma. Calcular la aceleración de la mosca como función del tiempo t y de las demás variables relevantes.

4. En ausencia de fuerzas de cuerpo, satisface equilibrio el siguiente campo de tensiones?

$$\sigma_{11}=\alpha\left[x_2^2+\nu\left(x_1^2-x_2^2\right)\right]$$
$$\sigma_{22}=\alpha\left[x_1^2+\nu\left(x_2^2-x_1^2\right)\right]$$
$$\sigma_{33}=\alpha\nu\left(x_1^2+x_2^2\right)$$
$$\sigma_{12}=-2\alpha\nu x_1 x_2$$
$$\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$$

5. Sea el movimiento $x_i=\left(1+\frac{t}{k}\right)a_i$, donde k es una constante, t es el tiempo y a_i es la componente i-ésima de la posición inicial.

   a. Determine la ecuación diferencial para la variación de densidad en el tiempo, a partir de la ecuación de conservación de masa.

   b. Si la densidad en t=0 es ρ_0, calcular la variación de la densidad con el tiempo.

Ayuda: Usar coordenadas espaciales para calcular $\operatorname{div} v$ en la primera parte. En la segunda parte, usar separación de variables para resolver la ecuación diferencial.

1)

a) $\text{rot}(\lambda \underline{a}) = \lambda \,\text{rot}(\underline{a}) + \underline{\nabla}\lambda \times \underline{a}$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda a_k) = \lambda \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} a_k \Longrightarrow$$

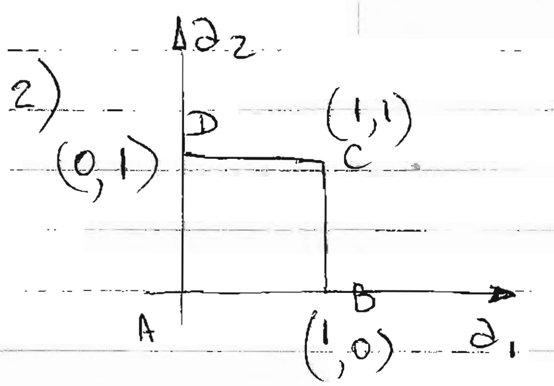
$$\lambda \,\text{rot}\, \underline{a} + \underline{\nabla}\lambda \times \underline{a}$$

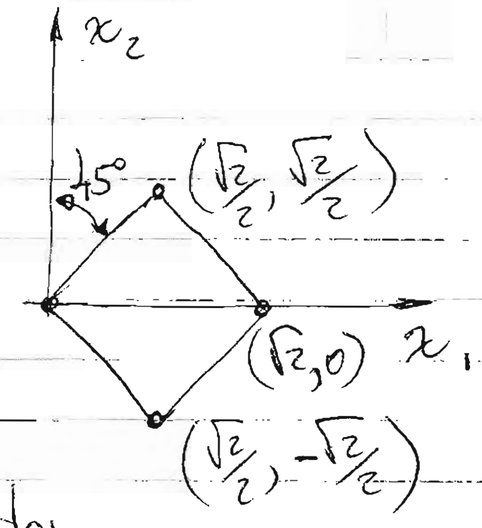
b) $\text{div}(\psi \underline{\nabla}\phi) = \psi \Delta\phi + \underline{\nabla}\psi \circ \underline{\nabla}\phi$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) = \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \Longrightarrow$$

$$\psi \Delta\phi + \underline{\nabla}\psi \circ \underline{\nabla}\phi$$

2)





a) Campo de desplazamientos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad a_{11} = \sqrt{2}/2, \quad a_{21} = -\sqrt{2}/2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad a_{12} = \sqrt{2}/2, \quad a_{22} = \sqrt{2}/2$$

Verif:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ✓$$

$$u_1 = x_1 - a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 - a_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2$$

$$u_2 = x_2 - a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 - a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) a_2$$

b) No puede aplicarse teoría de pequeños desplazamientos. Los términos del gradiente de desplazamientos $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ son todos del orden de 1. El cuerpo sufre grandes rotaciones.

c) Puede aplicarse teoría de deformaciones finitas (siempre se puede aplicar).

d)

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j}\right)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial a_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial a_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial a_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 0$$

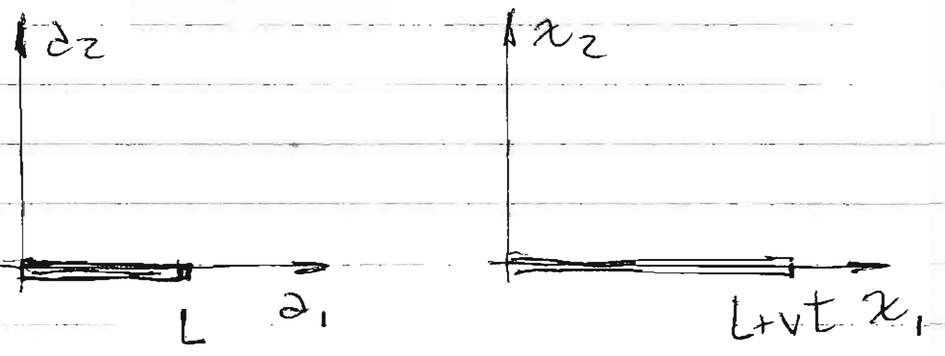
$$E_{12} = \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)}\right] = 0 = E_{21}$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2\right] = 0$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El cuerpo sufre una rotación rígida, y por lo tanto, la deformación es nula.

3)



a) posició partícula material arbitrària

$$x_1 = k\, a_1$$

$$kL = L + vt \Rightarrow k = 1 + \frac{v}{L}t$$

$$x_1 = \left(1 + \frac{vt}{L}\right) a_1$$

b)

i) $$V = \frac{dx_1}{dt} = \frac{v a_1}{L}$$

ii) $$V_1 = \frac{v a_1}{L} \qquad a_1 = \frac{x_1}{\left(1 + \frac{vt}{L}\right)}$$

$$V_1 = \frac{v}{L}\frac{x_1}{\left(1 + \frac{vt}{L}\right)} = \frac{v}{L+vt}\, x_1$$

iii) $$\alpha = \frac{D}{Dt}(V_1 + w) = \frac{\partial}{\partial t}(V_1 + w) + (V_1 + w)\frac{\partial V_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{v^2}{(L+vt)^2}\, x_1 \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{v}{L+tv}$$

$$\alpha = -\frac{v^2}{(L+vt)^2} x_1 + (v_1+\omega)\frac{v}{L+tv} =$$

$$= -\cancel{\frac{v^2}{(L+vt)^2} x_1} + \left(\cancel{\frac{v}{L+tv} x_1} + \omega\right)\frac{v}{L+tv} =$$

$$\alpha = \frac{v\,\omega}{L+tv}$$

4)

$$\sigma_{11} = \alpha\left[x_2^2 + \gamma\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right]$$
$$\sigma_{22} = \alpha\left[x_1^2 + \gamma\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right]$$
$$\sigma_{33} = \alpha\gamma\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$
$$\sigma_{12} = -2\alpha\gamma x_1 x_2$$
$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = 2\alpha\gamma x_1 \qquad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = -2\alpha\gamma x_1 \qquad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 2\alpha\gamma x_1 - 2\alpha\gamma x_1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} = -2\alpha\gamma x_2 \qquad \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 2\alpha\gamma x_2 \qquad \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = -2\alpha\gamma x_2 + 2\alpha\gamma x_2 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \checkmark$$

SI, Satisface equilibrio

5) $x_i = \left(1 + \frac{t}{k}\right) a_i$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{a_i}{k} = \frac{x_i}{k\left(1+\frac{t}{k}\right)} = \frac{x_i}{(k+t)}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{1}{k+t} + \frac{1}{k+t} + \frac{1}{k+t} =$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{3}{k+t}$$

$\therefore$ $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{3}{k+t} = 0$$

Osea, p/un punto material, tenemos:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{3}{k+t}\, dt$$

Integrado

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int -\frac{3}{k+t}\, dt$$

$$\ln \rho = \ln\left[(k+t)^{-3}\right] + C_1 \equiv$$

$$\ln \rho \equiv \ln\left[\frac{C}{(k+t)^3}\right]$$

$$\rho = \frac{C}{(k+t)^3}$$

Si $\rho = \rho_0$ para $t = 0$ $\Rightarrow$

$$\rho_0 = \frac{C}{k^3} \Rightarrow C = k^3 \rho_0$$

$$\therefore \quad \rho(t) = \left(\frac{k}{k+t}\right)^3 \rho_0$$